

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 aprile 1914.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Nel § 3 della mia Nota: *Sulle equazioni alle derivate funzionali* ⁽¹⁾, ho messo in luce la relazione fra equazioni integro-differenziali del 1° ordine ed equazioni alle derivate funzionali, limitandomi al caso della linearità per esaminare l'esempio più semplice. Mi permetto ora di estendere i detti risultati.

2. Sia $F[\theta(\xi), x, z]$ una funzione che dipende da tutti i valori di $\theta(\xi)$ nell'intervallo $0, 1$ e da due parametri x e z . Se $\theta(\xi)$ dipenderà anche da un parametro α , avremo che F sarà una funzione ordinaria di x, z, α ; ed in particolare, se prenderemo $z = \alpha$, F sarà una funzione ordinaria di x, z . Prendiamo dunque $\theta(\xi) = f(\xi, z)$ e consideriamo ⁽²⁾

$$F[f(\xi, z), x, z]$$

e l'equazione

$$(I) \quad \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} = F[f(\xi, z), x, z].$$

⁽¹⁾ Rend. R. Accad. dei Lincei, 1, 15 marzo 1914.

⁽²⁾ Cfr. la nota al § 3 della citata Memoria, pag. 395.

Per semplicità supponiamo che $F[\theta(\xi), x, z]$ possa considerarsi indipendente dalle derivate di $\theta(\xi)$ ⁽¹⁾; allora diremo che la (I) è una *equazione integro-differenziale del 1° ordine per rapporto a z*.

Per giustificare questa denominazione, basta pensare che F , sotto certe condizioni almeno, potrà esprimersi o per mezzo di una serie analoga a quella di Taylor ⁽²⁾ o analoga a quelle polinomiali di Weierstrass ⁽³⁾, e quindi, per mezzo di integrazioni multiple applicate alla f .

Nel caso particolare in cui F è della forma

$$\int_0^1 f(\xi, z) \varphi(x, \xi) d\xi,$$

in cui $\varphi(x, \xi)$ è una funzione determinata, si ricade nella equazione integro-differenziale considerata nel § 3 della Nota citata.

3. Supponiamo l'assoluta continuità di F rispetto agli elementi variabili; e supponiamo che, qualunque siano x e z , purchè $1 \geq x \geq 0$, $a + l \geq z \geq a - l$, si abbia

$$\left| F[\theta(\xi), x, z] - F[\theta_1(\xi), x, z] \right| < A\varepsilon,$$

se $|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon$ per ξ compreso fra 0 e 1, e $\theta(\xi)$ e $\theta_1(\xi)$ compresi fra $\psi(\xi) + k$ e $\psi(\xi) - k$; ove A denota una certa quantità costante e $\psi(\xi)$ una funzione continua. Allora, applicando il metodo delle approssimazioni successive, l'integrale della equazione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$(1) \quad f(x, z) = \psi(x) + \Theta[\psi(\xi), x, z],$$

in cui Θ si annulla per $z = a$. La detta forma dell'integrale f sarà valida per $1 \geq x \geq 0$, e z compreso in un certo intorno del punto a . È evidente che $\psi(x)$ rappresenta il valore iniziale di $f(x, z)$ per $z = a$.

L'equazione (1) si può anche scrivere

$$(1') \quad f(x, z) = \lambda \psi(x) + \int_a^z F[f(\xi, \zeta), x, \zeta] d\zeta,$$

la quale dovrà coincidere colla (1) se si fa il parametro costante λ eguale ad 1.

⁽¹⁾ Considereremo in altri lavori il caso adesso escluso.

⁽²⁾ Volterra, *Équations intégrales et intéro-différentielles*, pag. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

⁽³⁾ Cfr. Gateaux, *Sur la représentation des fonctionnelles continues*. Rend. Lincei, 21 dicembre 1913, pag. 646. Le serie analoghe a quelle polinomiali di Weierstrass furono date dapprima dal sig. Fréchet.

Nella ipotesi, che la $F|[\theta(\xi), x, z]$ sia sviluppabile in serie analoga a quella di Taylor rispetto a $\theta(\xi)$, ed i nuclei dei vari termini siano funzioni olomorfe di z nell'intorno di $z = a$, si potrà sviluppare $f(x, z)$ in serie di potenze di λ e di $z - a$, seguendo un procedimento analogo a quello che ho impiegato nel § XVI del Cap. III delle mie lezioni sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. In tal caso ci si può evidentemente estendere, per rapporto a z , dal campo reale al campo complesso.

Consideriamo z come un parametro costante, e risolviamo l'equazione (1) rispetto a $\psi(x)$ ⁽²⁾. Avremo

$$\psi(x) = f(x, z) + \Theta_1 | [f(\xi), z, x, z] |.$$

Si riconosce facilmente che, se si indica con

$$\Phi | [\theta(x)] |,$$

una quantità che dipende arbitrariamente da $\theta(x)$ per x compresa fra 0 e 1 (senza punti eccezionali), e se per $\theta(x)$ si sostituisce

$$\varphi(x) + \Theta_1 | [\varphi(\xi), x, z] |$$

si avrà

$$\Phi \left| \left[\varphi(x) + \Theta_1 | [\varphi(\xi), x, z] | \right] \right| = \Omega | [\varphi(\xi), z] |,$$

la quale soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \int_0^1 \Omega' | [\varphi(\xi), z, x] | F | [\varphi(\xi), x, z] | dx = 0,$$

ove

$$\Omega' | [\varphi(\xi), z, x] |$$

denota la derivata di Ω rispetto a φ fatta nel punto x . Questa proposizione costituisce una facile estensione del teorema dato nella precedente Nota (§ 3).

4. Di speciale interesse sono le equazioni del tipo canonico.

Abbiasi

$$H | [f(\xi), \varphi(\xi), z] |,$$

⁽¹⁾ Cfr. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1918, chap. IV.

e supponiamo che, nell'ipotesi di z costante, sia

$$\delta H = \int_0^1 H'_f \left[f\left(\frac{1}{\xi}\right), \varphi\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] \delta f(x) dx + \\ + \int_0^1 H'_\varphi \left[f\left(\frac{1}{\xi}\right), \varphi\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] \delta \varphi(x) dx.$$

Le equazioni

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial q(x, z)}{\partial z} = H'_\varphi \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), p\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] \\ \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} = -H'_f \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), p\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] \end{cases}$$

si diranno di tipo canonico.

Siano le derivate di

$$(2) \quad \Phi \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), a\left(\frac{1}{\xi}\right), z \right],$$

fatte rispetto a $q(\xi)$ e $a(\xi)$ pel punto x , rispettivamente

$$(3) \quad \Phi'_q \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), a\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right], \quad \Phi'_a \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), a\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right].$$

Denotiamole, per semplicità, con

$$(4) \quad \Phi'_q(z, x), \quad \Phi'_a(z, x).$$

Se Φ , non ha punti eccezionali, e soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$(III) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + H \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), \Phi'_q(z, \frac{1}{\xi}), z \right] = 0,$$

gl'integrali delle equazioni (II) si potranno ricavare dalle relazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi'_a \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), a\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] = b(x) \\ \Phi'_q \left[q\left(\frac{1}{\xi}\right), a\left(\frac{1}{\xi}\right), z, x \right] = p(x, z), \end{cases}$$

ove $b(x)$ rappresenta un funzione continua arbitraria, purchè si ammetta, inoltre, che, nell'ipotesi di z e x e $a(\xi)$ invariabili, sia

$$\delta \Phi'_a \left[q(\xi), a(\xi), z, x \right] = A \delta q(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} \left[q(\xi), a(\xi), z, x, y \right] \delta q(y) dy,$$

e l'equazione integrale

$$A \psi(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq} \left[q(\xi), a(\xi), z, x, y \right] \psi(y) dy = \theta(x)$$

abbia, almeno entro un certo campo, per la incognita $\psi(x)$ una soluzione unica, determinata e finita ⁽¹⁾.

5. Nella ipotesi che H non contenga z , prendiamo Φ indipendente da z , onde sopprimiamo nelle espressioni (2), (3) e (4) la variabile z e scriviamo queste ultime

$$(4') \quad \Phi'_q(x) \quad , \quad \Phi'_a(x) .$$

Supponiamo che, invece della (III), sia soddisfatta la relazione

$$(IV) \quad h + H | [q(\xi)_0^1, \quad \Phi'_q(\xi)_0^1] | = 0 ,$$

con

$$h = \Omega | [a(\xi)_0^1] | \quad , \quad \delta h = \int_0^1 \Omega'_a | [a(\xi)_0^1, x] | \delta a(x) dx .$$

Allora, alle (5), potremo sostituire le altre

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi'_a | [q(\xi)_0^1, z, a(\xi)_0^1, x] | = b(x) + z \Omega'_a | [a(\xi)_0^1, x] | \\ \Phi'_q | [q(\xi)_0^1, z, a(\xi)_0^1, x] | = p(x, z) . \end{array} \right.$$

6. Come esempio mi permetto di svolgere un caso particolare che corrisponde al caso di Stäckel della separazione delle variabili ⁽²⁾.

Sia $g(x, y, q(x)) = \gamma(x, y)$ una funzione composta di $q(x)$ nel senso ordinario.

Calcoliamo $\Gamma(x, y)$, tale che il teorema di reciprocità sia soddisfatto ⁽³⁾,

$$\gamma(x, y) + \Gamma(x, y) = - \int_0^1 \gamma(x, \xi) \Gamma(\xi, y) d\xi ,$$

nell'ipotesi del determinante diverso da zero. $\Gamma(x, y)$ dipenderà da tutti i valori di $q(x)$ per x compreso fra 0 e 1, onde potremo scrivere

$$\Gamma(x, y) = G | [x, y, q(\xi)_0^1] | .$$

(1) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IV.

(2) Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, tomo I, Leipzig 1902, pag 77 e seg.

(3) Volterra, *Équations intégrales et intégral-différentielles*, pag. 105.

Prendiamo

$$A[x, q(\xi)] = 2\lambda(x) + 2 \int_0^1 G[x, y, q(\xi)] \lambda(y) dy$$

$$U[q(\xi)] = \frac{1}{2} \int_0^1 A[x, q(\xi)] \psi(x, q(x)) dx,$$

ove $\lambda(x)$ è una funzione arbitraria e $\psi(x, q(x))$ pure una funzione arbitraria composta, nel senso ordinario, di $q(x)$.

Formiamo

$$H[q(\xi), p(\xi)] = \frac{1}{2} \int_0^1 A[x, q(\xi)] p^2(x) dx - U[q(\xi)].$$

Ciò premesso, calcoliamo

$$F(x, q) = \int_0^q \sqrt{\psi(x, q) + a(x) + \int_0^1 a(\xi) q(x, \xi, q) d\xi} dq$$

$$\Phi[q(\xi), a(\xi)] = \int_0^1 F(x, q(x)) dx.$$

Si dimostra che

$$\int_0^1 A[x, q(\xi)] \Phi_q^2(x) dx = 2U[q(\xi)] + 2 \int_0^1 \lambda(\xi) a(\xi) d\xi,$$

ossia che l'equazione (IV) è soddisfatta prendendo

$$h = \int_0^1 \lambda(\xi) a(\xi) d\xi.$$

Gli integrali (5') saranno quindi

$$(5'') \left\{ \begin{aligned} \int_0^{q(x, z)} \frac{dq}{\sqrt{D(x, q)}} + \int_0^1 dy \int_0^{q(y, z)} \frac{g(y, x, q) dq}{\sqrt{D(y, q)}} &= \lambda(x) z + b(x) \\ \sqrt{D(x, q(x, z))} &= p(x, z). \end{aligned} \right.$$

7. L'annullarsi della variazione dell'integrale

$$\int_0^{z_0} \left\{ H[q(\xi, z), p(\xi, z), z] - \int_0^1 \frac{\partial q(\xi, z)}{\partial z} p(\xi, z) d\xi \right\} dz,$$

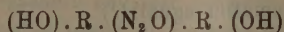
facendo variare di infinitamente poco q e p , conduce evidentemente alle equazioni integro-differenziali (II), e quindi alla equazione alle derivate funzionali (III).

8. È interessante di mettere a confronto i tipi diversi di equazioni alle derivate funzionali che si manifestano allorchè si parte da equazioni alle derivate parziali ⁽¹⁾ o da equazioni integro-differenziali, derivanti, le une e le altre, da questioni di calcolo delle variazioni.

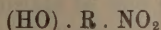
9. Problemi meccanici che conducano ad equazioni del tipo (II) si presentano, per esempio, allorchè si considerano sciami di corpuscoli del tipo di quelli che si presentano nello studio dell'anello di Saturno, che possono sotto un certo aspetto trattarsi come sistemi continui senza che fra gli elementi esistano vincoli esprimibili con equazioni di tipo differenziale.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli* ⁽²⁾. Nota del Socio ANGELO ANGELI.

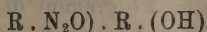
Nel mentre gli azossifenoli della forma:



dove R rappresenta un residuo aromatico, si possono facilmente preparare riducendo, nelle opportune condizioni, i nitroderivati:

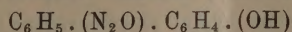


e perciò sono sostanze accessibili ed anche bene studiate, le nostre conoscenze sopra gli azossifenoli aromatici che nella loro molecola contengono un solo ossidrile,

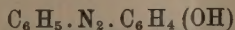


sono ancora quanto mai limitate ed incerte.

Nella letteratura si trova menzionato un paraossiazossibenzolo.



che venne preparato ancora nel 1870 da Kekule ed Hidegh ⁽³⁾ per trattamento del paraossiazobenzolo,



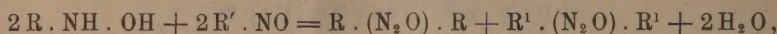
⁽¹⁾ Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. III, § 8.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel R. Istituto di studi superiori in Firenze.

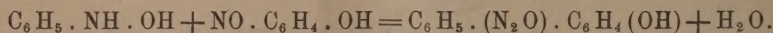
⁽³⁾ Ber. Berichte, 3, 235 (1870).

con pentacloruro di fosforo. Ma successivamente Wallach e Kiepenheuer ⁽¹⁾ hanno messo in dubbio l'esattezza di questa formola, la quale venne poi trovata erronea a E. Bamberger e W. Bernays ⁽²⁾, i quali pervennero per tutta altra via ad una sostanza cui si deve attribuire con tutta sicurezza la struttura di un vero paraossiazossibenzolo. Bamberger rinvenne infatti tale prodotto fra i composti che il nitrosobenzolo fornisce per decomposizione spontanea in presenza di alcali. Ma seguendo questo modo di operare, i rendimenti in prodotto sono minimi; basti pensare che Bamberger, partendo da 300 grammi di nitrosobenzolo pervenne a gr. 0,5 di parazossifenolo, e che da un chilo di nitrosobenzolo non ottenne nemmeno due grammi dell'isomero ortoderivato; come si vede, ci è voluta tutta l'abilità dell'illustre chimico di Zurigo per isolare quantità così piccole di sostanze dal complicatissimo miscuglio che si forma.

Allo scopo di portare una nuova conferma alle sue vedute, il Bamberger ⁽³⁾ ha in seguito realizzato, in altro modo, la sintesi del medesimo paraossiazossibenzolo. Sebbene nell'azione dei nitroderivati sopra le idrossilammine non si formino in generale azossicomposti misti, ma bensì miscugli dei prodotti a radicali aromatici eguali ⁽⁴⁾:



tuttavia Bamberger e Bernays hanno trovato che nel caso della fenilidrossilammina e del paranitrosufenolo la reazione procede nel senso che essi desideravano:



Ma anche in questo caso i rendimenti sono quanto mai scarsi, giacché il prodotto principale è costituito da azossibenzolo; partendo infatti da 30 grammi di paranitrosufenolo e 27 grammi di fenilidrossilammina ebbero 21 grammi di azossibenzolo e 34 grammi di una massa nera resinosa da cui con grande difficoltà isolarono gr. 4,6 di un prodotto cristallino, che riuscirono a dividere in cinque frazioni dai punti di fusione:

154-156° , 151-153°,5 , 142-150° , 139-148° , 105-116°.

La prima, per ulteriore purificazione, fuse a 156-157°, e si dimostrò identica col paraossiazossibenzolo che essi ottennero, come si è detto, nella decomposizione del nitrosobenzolo. Gli autori, che allora non potevano pensare alle isomerie da me più tardi prevedute e riscontrate, non si occuparono

⁽¹⁾ Ibid., 14, 2617 (1831).

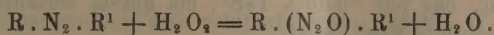
⁽²⁾ Ibid., 35, 1624 (1902); cfr. anche Bamberger: Ber. Rerichte, 33, 1939 (1900); ibid., 35, 1614 (1902).

⁽³⁾ Berliner Berichte, 35, 1625 (1902).

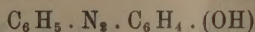
⁽⁴⁾ Ibid., 30, 2278 (1897).

dello studio delle altre frazioni, ma per quanto dirò in seguito è degno di interesse soprattutto quella che fonde a 105-116°.

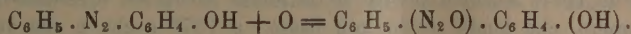
Da quanto ho esposto risulta che i pochi azossifenoli finora noti, vanno annoverati fra le sostanze che più difficilmente si possono ottenere e per tale ragione è stato pressochè impossibile sottoporli ad uno studio ulteriore ed esaminare in modo esauriente il loro comportamento. Per tale motivo io ho cercato di prepararli per altra via, giovandomi, cioè, del processo di ossidazione con acqua ossigenata in soluzione acetica (acido peracetico) che negli altri casi mi ha permesso di trasformare con rendimento quantitativo gli azoderivati nei corrispondenti azossicomposti:



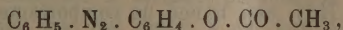
In questo caso però, a prima vista, si presentava una difficoltà, dovuta alla presenza dell'ossidrilie nell'azofenolo di partenza:



giacchè non si poteva prevedere che tale prodotto, in generale poco stabile agli ossidanti, fosse anche in grado di resistere all'azione dell'acido peracetico in modo da limitarsi al passaggio:

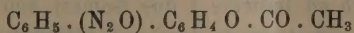


Per tale ragione io ho iniziato le mie ricerche giovandomi del solito artificio che consiste nel sostituire l'idrogeno ossidrilico con un radicale che a trasformazione compiuta si potesse poi facilmente eliminare, ed a tale scopo ho preparato il derivato acetilico, che era già noto, del paraossiazobenzolo:

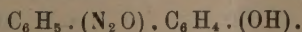


tanto più che operando in soluzione di acido acetico glaciale era inverosimile che il processo di ossidazione fosse accompagnato anche da eliminazione del residuo acetico.

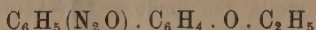
L'esperienza, anche in questo caso, ha confermata l'esattezza delle previsioni; la soluzione dell'acetilazofenolo infatti, colorata in bruno, per azione dell'acqua ossigenata diventa gialla, e per aggiunta di acqua si separa un prodotto bianco-giallognolo, splendente, che ha la composizione richiesta dall'azossicomposto:



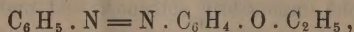
Saponificato con soda in soluzione alcoolica perde il gruppo acetilico per dare l'azossifenolo, che fonde a 148°:



Il suo etere etilico, dopo molte ricristallizzazioni da ligroina, fonde a 72°



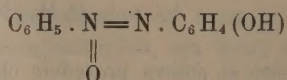
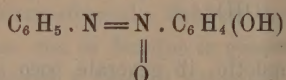
e ridotto con amalgama di alluminio fornisce nettamente l'azoetere:



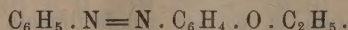
identico a quello già noto.

Ma tanto il derivato acetilico quanto l'azossifenolo così preparati, presentano punti di fusione i quali, sebbene sieno netti, sono di alcuni gradi più bassi di quelli trovati da Bamberger. Dapprima ho pensato all'azossifenolo di Kekule, che pur fonde a 148°; ma questa sostanza, a differenza della mia, è insolubile negli alcali.

Perciò volli ricercare se anche in questo caso, come in tutti quelli che finora ho studiati, invece di una sostanza sola non si formassero i due isomeri che io aveva preveduti:

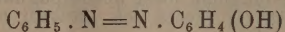


Infatti dal prodotto fusibile a 148° dopo molte cristallizzazioni ne ho ricavato uno che fonde a 156°, mentre nelle acque madri ne è contenuto un secondo, isomero, che fonde molto più basso, a 107° e che a sua volta fornisce un etere etilico fusibile a 75°. Questo etere ridotto con amalgama di alluminio, fornisce del pari l'azoetere identico al precedente:



Sebbene i punti di fusione dei due eteri etilici degli azossifenoli sieno molto prossimi (72° e 75°), essi hanno un comportamento molto diverso, ed il loro miscuglio, a circa parti eguali, fonde verso 55°.

Arrivati a questo punto ho tentato anche l'ossidazione diretta dell'azofenolo:

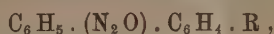


ed ho trovato che essa pure procede nettamente, e così sono arrivato in modo più facile allo scopo; anche in questo caso si perviene a due isomeri che più agevolmente si possono separare l'uno dall'altro, e le proprietà di uno di essi coincidono perfettamente con quello isolato da Bamberger (156°).

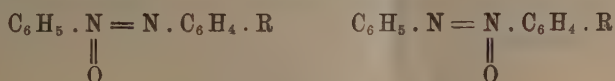
Per ora mi limiterò ad indicare i due isomeri con le lettere α e β , senza volere con questo attribuire la formola definitiva di struttura:

	p. fus.		p. fus.
α -paraazossifenolo	156°	β -paraazossifenolo	107°
derivato acetilico	89°	derivato acetilico	73°
" etilico	72°	" etilico	75°

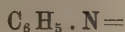
Nel caso di altri azossicomposti parasostituiti:



dove R rappresenta un residuo alogenico, nitrico, carbossilico e solfonico, ci è stato agevole lo stabilire in modo rigoroso quale delle due forme si debba attribuire ai due isomeri:



studiando principalmente il loro comportamento rispetto al bromo ed allo acido nitrico. A parità di condizioni, infatti, solamente quelli della seconda forma reagiscono con questi reattivi per formare bromo ovvero nitroderivati, nei quali il nuovo residuo è entrato nell'anello aromatico congiunto all'azoto trivalente:



Ma nel caso degli azossifenoli e dei loro eteri questo metodo non si può più applicare, giacchè ho osservato che anche l'atomo di ossigeno, sotto forma di ossidrilie ovvero di ossietile, al pari dell'atomo di azoto trivalente



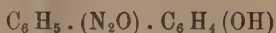
può favorire per conto suo l'entrata degli alogeni ovvero del gruppo nitrico nell'anello aromatico al quale esso è immediatamente congiunto. Nel caso dell'atomo di azoto trivalente si formano prodotti di addizione intermedi ad azoto pentavalente: nel caso dei fenoli e dei loro eteri invece molto probabilmente si formano derivati dell'ossigeno tetravalente, e le proprietà basiche dell'ossigeno e dei suoi eteri, come è noto, vennero in questi ultimi tempi poste in rilievo da molti chimici. Perciò, contrariamente a quanto si verifica per le altre coppie di azossicomposti isomeri finora studiati, tutti e due gli azossifenoli reagiscono con bromo; lo stesso fanno i loro eteri etilici che danno entrambi monobromoderivati che per caso fondono anche quasi alla stessa temperatura. Uno degli eteri etilici



è identico a quello descritto due anni or sono da Angeli e Valori⁽¹⁾; il prodotto invece che fonde a 56° non è improbabile che rappresenti un miscuglio della forma che fonde a 72° con quella che fonde a 75°, forme forse isomorfe e che è pressochè impossibile scindere nei componenti per mezzo

(¹) Questi Rendiconti. vol. XXI, 1° sem., 729 (1912).

di successive cristallizzazioni frazionate. Invece riesce più agevole separare i due azossifenoli da cui derivano



che differiscono fra di loro notevolmente, come si è visto, e per punto di fusione e per solubilità nei diversi solventi.

Rispetto all'acqua ossigenata si comporta in modo analogo anche il p-bromo-p-ossiazobenzolo :

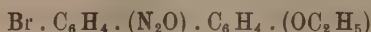


il quale fornisce un azossicomposto :



che fonde a 156° assieme ad un altro prodotto che si decompone verso 260° che ancora non venne studiato; esso pure è solubile negli alcali e probabilmente rappresenta l'isomero.

Con etilato sodico e ioduro di etile il primo dà l'etere :



il quale per riduzione perde un atomo di ossigeno per dare l'azoetere :



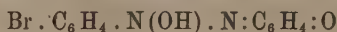
che a sua volta è identico al prodotto che si prepara eterificando con ioduro di etile il p-bromoazofenolo già noto :



Questi passaggi che si compiono in modo quanto mai netto, non lasciano nessun dubbio sulla struttura di questi prodotti non solo, ma dimostrano che in tutte queste reazioni le sostanze prese in esame reagiscono secondo le forme ossidriliche e non secondo le forme chinoniche, quali per esempio :



ovvero :



In modo del tutto simile procede anche l'ossidazione dei bisazofenoli : trattando infatti con acqua ossigenata in soluzione acetica il p-bisazofenolo da me descritto lo scorso anno (1) :

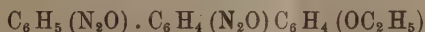


(1) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem. 844 (1913).

esso assume due atomi di ossigeno per dare un miscuglio di isomeri della forma:



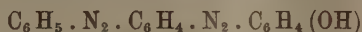
In questo caso, trattandosi di un bisazoderivato asimmetrico, gli isomeri possibili sono quattro; molto probabilmente finora io sono riuscito ad isolarne tre, che fondono rispettivamente a 200°, 184° e 175°. Dal prodotto che fonde a 184° venne preparato anche l'etere etilico:



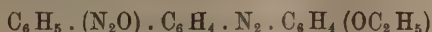
che fonde verso 125° e che è identico ad uno dei prodotti che si ottengono ossidando con acqua ossigenata (1).



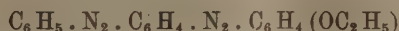
Con acido solforico concentrato tanto l'etere etilico quanto il bisazossifenolo da cui deriva, si colorano intensamente in violetto, la stessa colorazione che si ottiene sciogliendo in questo reattivo il p-bisazofenolo:



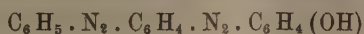
Come si osserva in quasi tutti i casi finora studiati, anche qui l'acido solforico ha tolto i due atomi di ossigeno e saponificato il gruppo etossilico; a questo riguardo dirò che l'acido solforico saponifica facilmente tali eteri, tanto che anche i prodotti:



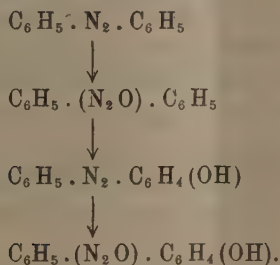
e



per azione di questo reattivo forniscono subito il bisazofenolo corrispondente



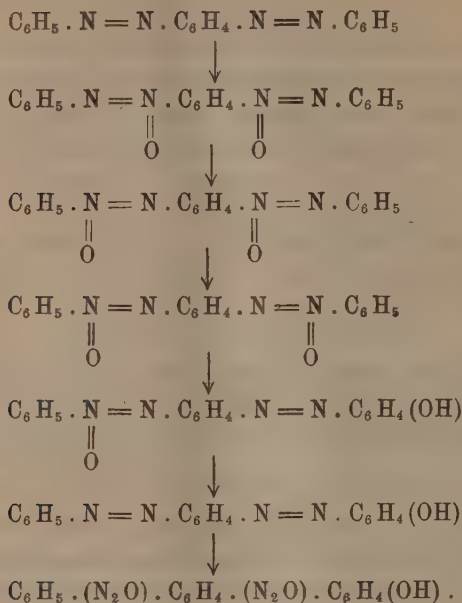
Riassumendo quanto si è detto in questa Nota, e ricordando alcune reazioni descritte lo scorso anno (2) potremo rappresentare col seguente schema i passaggi realizzati partendo dall'azobenzolo:



(1) Ibid, pag. 848.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., 201; ibid., 844 (1913).

Partendo invece dal bisazobenzolo si possono effettuare le successive trasformazioni:



PARTE SPERIMENTALE.

Ossidazione dell'acetilparaossiazobenzolo. — Il derivato acetilico venne sciolto a caldo nella sufficiente quantità di acido acetico glaciale ed al liquido bruno così ottenuto si aggiunge, circa un egual peso dell'acetilderivato, di acqua ossigenata al 30 % (peridrol Merck).

La quantità di acido acetico si regola in modo che per aggiunta dell'acqua ossigenata non si separi dal derivato acetilico. Si riscalda a b. m. verso 80° e dopo qualche ora il liquido è diventato giallo; allora si versa in acqua la quale determina la separazione di una massa cristallina che viene purificata dall'alcool bollente. Si ottengono così aghettini bianco giallognoli, splendidi, che fondono verso 81°. I dati dell'analisi corrispondono a quelli richiesti dal derivato acetilico del paraossiazossibenzolo:



gr. 0,1025 di sostanza diedero cc. 9.6 di azoto a 14°.3 e 758 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_8$
N	11,10	10,94

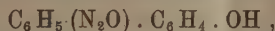
Il derivato acetilico viene immediatamente saponificato dalla potassa alcoolica; il liquido giallo così ottenuto si diluisce con acqua e poi acidi-

ficato con acido acetico. Si separa così un prodotto che purificato dal benzolo si presenta in aghi gialli che fondono nettamente a 148°.

gr. 0,1580 di sostanze diedero cc. 17.7 di azoto a 14°.2 e 758 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}N_2O_2$
N	13,28	13,08

Anche in questo caso l'analisi corrisponde all'azossifenolo:

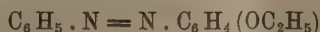


ma se il punto di fusione coincide con quello dato da Kekule, esso è solubile negli alcali e d'altra parte non concorda con il punto di fusione 156° che Bamberger ha assegnato al suo prodotto avuto dal nitrosobenzolo. Perciò ho creduto opportuno ricercare a quale fatto fosse dovuta questa diversità nei punti di fusione, che sono ben netti, ed a tale scopo ho eterificato lo azossifenolo sciogliendone una molecola nella soluzione alcoolica di un atomo di sodio, e poi bollendo un lieve eccesso di ioduro di etile fino a che il liquido è diventato acido. Un paio d'ore sono sufficienti. Si distilla allora la maggior parte dell'alcool, al residuo si aggiunge un po' di soda caustica e successivamente acqua.

Si separa così un prodotto che ricristallizzato più volte da ligroina si presenta in laminette giallognole, splendenti che fondono a 72° e che si mostrò del tutto identico a quello ottenuto due anni or sono da Angeli e Valori (¹)



Al pari di questi, ridotto nel modo più volte descritto con amalgama di alluminio in soluzione eterea e successivamente ossidato con ossido di mercurio, fornisce nettamente l'azoetere:



identico a quello già preparato da altri (²).

Sulla sua struttura non vi ha perciò nessun dubbio; ma nelle acque madri da cui venne separato il prodotto che fonde a 72°, ne ho rinvenuto un altro che fonde, non nettamente, più basso, verso 55°. Ciò dimostra dunque che i prodotti prima descritti, l'azossifenolo ed il suo acetilderivato, per quanto abbiano l'aspetto di individui unici, sono miscugli di isomeri, probabilmente isomorfi. Ed infatti concentrando fortemente le prime acque madri da cui si è separato il prodotto che fonde a 148°, ho avuto un'altra sostanza molto più solubile in benzolo e che fonde più bassa, a 107°; è costituita

(¹) Questi Rendiconti, vol. XXI, 1° sem., 729 (1912).

(²) P. Jacobson e W. Fischer, Berliner Berichte, 25, 902 (1892).

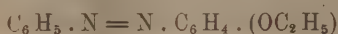
del pari da aghi gialli, splendenti, solubili negli alcali e che hanno la stessa composizione.

gr. 0,1526 di sostanza diedero c. c. 16,6 di azoto a 6°,3 e 749 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{10}N_2O_3$
N	13,04	13,08

Eterificato con ioduro di etile in presenza di alcoolato sodico, come si è fatto per il caso precedente fornisce del pari un etere etilico che fonde a 75° ed invece il precedente fonde a 72°: mentre però quest'ultimo è nettamente colorato in giallo l'isomero che fonde a 75° è quasi bianco, con un lieve accenno al giallognolo; il miscuglio dei due, a circa parti eguali, fonde verso 55°.

Ridotto con amalgama di alluminio in soluzione eterea e poi ossidato con ossido di mercurio, fornisce del pari l'azoetere:



identico a quello preparato dall'isomero.

Solamente ricristallizzando un grandissimo numero di volte il prodotto che fonde a 148° prima da alcool e successivamente da benzolo, sono finalmente riuscito ad avere un prodotto che fonde a 156° e le cui proprietà coincidono con quelle descritte da Bamberger.

gr. 0,1915 di sostanza diedero c. c. 20,9 di azoto a 10°,2 e 760 mm.

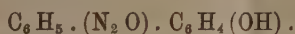
	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{10}N_2O_3$
N	13,16	13,08

Ossidazione del paraossiazobenzolo. Anche in questo caso l'ossiazobenzolo venne riscaldato in soluzione acetica, con circa il suo peso di peridrol, a bagno-maria, fino a che il calore del liquido è diventato giallo con tendenza al bruno. Per lo più 4, ovvero 5 ore, sono sufficienti; un riscaldamento più prolungato non è consigliabile perchè a lungo andare anche gli azossifenoli che si sono formati vengono decomposti con produzione di prodotti in parte resinosi ed in parte cristallini che ancora non vennero studiati.

Durante il riscaldamento della soluzione acetica, si separa pure piccola quantità di una polvere cristallina, giallognola, solubile negli alcali, fusibile verso 242° con annerimento, e che ancora non venne esaminata.

Viene separata per filtrazione ed alla soluzione acetica si aggiunge acqua; si separa così una massa giallastra, cristallina che dopo averla seccata nel vuoto si purifica da benzolo bollente. Una parte del prodotto si separa sotto forma di granuli cristallini, che aderiscono fortemente alle pareti del vetro; ricristallizzato un altro paio di volte dal benzolo fonde a

156° ed è costituito da una massa cristallina, giallognola. Essa è identica al prodotto avuto da Bamberger:



gr. 0,1598 di sostanza diedero c.c. 17,2 di azoto a 7° e 760 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{12}\text{H}_{10}\text{N}_2\text{O}_2$
N	13,13	13,08

Eterificato sul solido modo con ioduro di etile in presenza di alcoolato sodico fornisce l'etere:



che fonde a 72° ed è perfettamente puro.

L'azossifenolo p. f. 156° venne bollito per circa tre ore con anidride acetica, poi si tratta il liquido con carbonato sodico allo scopo di decomporre l'anidride che non ha reagito, e si ha così l'acetilderivato che si purifica da alcool bollente, in presenza di piccola quantità di nero animale. Si ottengono così laminette quasi bianche, dotate di splendore argenteo, che fondono a 89°. Anche queste proprietà coincidono perfettamente con quelle del derivato acetilico descritto da Bamberger.

gr. 0,1478 di sostanza diedero c.c. 13,9 di azoto a 8° e 745 mm.

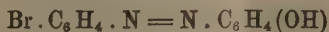
	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_2$
N	11,20	10,94

Anche l'azossifenolo isomero che fonde a 107° per lo stesso trattamento fornisce un derivato acetilico che si presenta in squamme bianco giallognole, che fondono a 73°.

gr. 0,1483 di sostanza diedero c.c. 13,8 di azoto a 8°,6 e 751 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_2$
N	11,15	10,94

Ossidazione del bromoossiazobenzolo. — Il p-bromo-paraossiazobenzolo

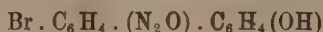


sciolto in acido acetico caldo venne ossidato nel modo più volte descritto con circa l'egual peso di peridrol. Il liquido dapprima bruno va man mano facendosi più chiaro, tanto che dopo circa 5 ore è diventato giallo scuro. Contemporaneamente si separa una polvere cristallina, colorata in giallo, poco solubile in tutti i solventi e che si decompone verso 260°; si scioglie invece negli alcali e non venne ancora ulteriormente esaminata.

La soluzione acetica, separata per filtrazione, per aggiunta di acqua fornisce un precipitato voluminoso, che venne raccolto su filtro e lavato ac-

curatamente con acqua. Ricristallizzato più volte da benzolo bollente si presenta sotto forma di una polvere cristallina, giallognola, che fonde a 156°. È solubile negli alcali.

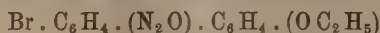
Anche in questo caso si è formato il corrispondente azossicomposto:



gr. 0,1655 di sostanza diedero c. c. 13,7 di azoto a 13°,9 e 744 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2\text{Br}$
N	9,64	9,56

Con ioduro di etile ed alcoolato sodico dà l'etere etilico



che purificato dall'alcool costituisce aghettini gialli che fondono a 123°.

gr. 0,1714 di sostanze diedero c. c. 12,8 di azoto a 13°,4 e 753 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O}_2\text{Br}$
N	8,82	8,72

Questo etere ridotto nel modo più volte descritto con l'amalgama di alluminio e poi ossidato con ossido di mercurio, fornisce l'azoetere:



che dall'alcool bollente si separa sotto forma di lamine giallo dorate, dotate di vivo splendore, che fondono a 136°.

gr. 0,1548 di sostanza diedero c. c. 12,3 di azoto a 11°,6 e 747 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{12}\text{N}_2\text{O Br}$
N	9,37	9,18

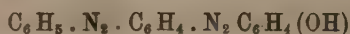
La sostanza è perfettamente identica col prodotto che si ottiene eterificando il parabromo-paraossiazobenzolo



con ioduro di etile in presenza di etilato sodico.

L'altro azossicomposto isomero non l'ho ancora studiato; molto probabilmente esso è costituito dalla polvere gialla cristallina che si forma assieme al precedente ed alla quale venne prima accennato.

Ossidazione del p-bisazofenolo. — Il parabisazofenolo da me descritto lo scorso anno ⁽¹⁾.



(¹) Questi Rendiconti, vol. XXII, 1° sem., 358 (1913).

venne ossidato nel solido modo con peridrol, in soluzione di acido acetico glaciale.

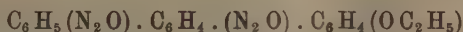
Anche in questo caso dopo 4-5 ore di riscaldamento sopra bagno-maria il colore intensamente bruno del liquido è passato al giallo, e nello stesso tempo si separano cristalli pure colorati in giallo, che vennero separati dall'acido acetico, sciolti in soda caustica molto diluita, e poi riprecipitati con anidride carbonica. Il prodotto viene in seguito purificato da benzolo bollente, da cui per raffreddamento si separano cristallini di color giallo limone che fondono a 185°. Anche in questo caso l'azocomposto di partenza ha assunto due atomi di ossigeno per dare il bisazossifenolo:



gr. 0,1560 di sostanza diedero c. c. 20,5 di azoto a 11°,4 e 751 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_3$
N	16,73	16,76

Eterificato con ioduro di etile ed alcoolato sodico fornisce l'etere corrispondente:

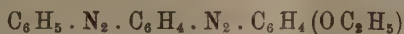


che venne purificato da benzolo: cristallini gialli che fondono a 125° in un liquido torbido che solamente a temperatura più elevata diventa limpido. Questo comportamento è senza dubbio dovuto a cristalli liquidi.

gr. 0,2136 di sostanza diedero c. c. 29 di azoto a 12°,6 e 734 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{30}\text{H}_{18}\text{N}_4\text{O}_3$
N	15,67	15,47

Questo etere è a sua volta identico al prodotto meno solubile in benzolo, che si ottiene facendo agire l'acqua ossigenata in soluzione acetica sopra l'etere,



da me descritto lo scorso anno e che pure presenta in modo marcatissimo il fenomeno dei cristalli liquidi.

All'acido acetico filtrato dalla sostanza che fonde a 185° si aggiunge molta acqua, la quale determina la separazione di una massa cristallina, giallognola, che raccolta su filtro, lavata accuratamente con acqua e seccata a 100° venne trattata con benzolo bollente: una parte pochissimo solubile fonde a 200°. È solubile negli alcali, ed ha la stessa composizione della prima descritta.

gr. 0,1542 di sostanza diedero c. c. 21,6 di azoto a 16° e 756 mm.

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{18}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_3$
N	16,46	16,76

Nel benzolo, da cui venne separata la precedente sostanza è contenuto un altro prodotto, molto più solubile in questo solvente. Si presenta in aghetti gialli che fondono verso 175° , ed è del pari solubile negli alcali. gr. 0.1446 di sostanza diedero c. c. 20,5 di azoto a $14^{\circ},2$ e 743 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{14}N_4O_8$
N	16,48	16,76

Tanto queste sostanze, come anche la precedente, abbruciano con grandissima difficoltà; fondono tutte in liquidi torbidi (cristalli liquidi), e ciò rende molto difficile il poter stabilire con sicurezza se una delle forme non contenga ancora piccole quantità degli isomeri assieme ai quali si ottiene.

Mi riservo lo studio ulteriore degli azossifenoli, e soprattutto di determinare la struttura degli isomeri che finora sono riuscito a preparare.

Anche nell'esecuzione di una parte delle presenti ricerche ho avuto per collaboratore il dott. Bruno Valori al quale esprimo i miei ringraziamenti.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. ALMANSI.

1. In due Note comparse di recente in questi stessi Rendiconti, ho esaminato il problema a cui si accenna nel titolo, supponendo che il movimento della massa liquida ammettesse un potenziale di velocità ⁽¹⁾.

Io voglio ora esaminare il problema delle azioni esercitate sopra un corpo, nella ipotesi che il liquido abbia il movimento più generale, potendosi, anche in tal caso, stabilire alcune formule notevolmente semplici, e non prive d'interesse.

Su questo argomento, del quale ebbi già ad occuparmi (seguendo, però, una via diversa) in altre mie pubblicazioni degli anni 1909-10, io ritorno qui brevemente, affinchè in queste ultime tre Note si trovino raccolti tutti i risultati che nelle mie ricerche intorno al problema di cui si tratta, ho potuto stabilire.

2. Chiamo σ la superficie che limita il corpo C pel quale si vuole esaminare l'azione esercitata dalla massa che lo circonda. Questa sarà poi limitata da una, o da più altre superficie, il cui insieme denoterò con Σ . Si ammetterà che sopra le particelle liquide non agiscano forze di massa. La densità sarà supposta uguale ad 1.

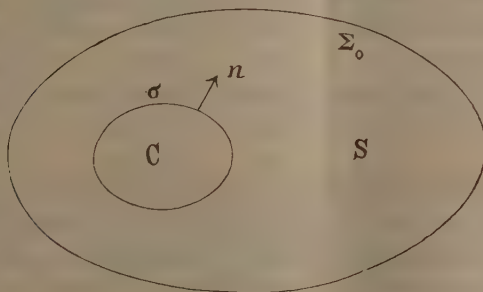
⁽¹⁾ *Sopra le azioni ecc.*, a. 1913, 2° sem., fasc. 11°; *Sulle attrazioni newtoniane di origine idrodinamica.* a. 1914, 1° sem., fasc. 5°.

In un punto qualunque di σ o Σ_0 chiamerò n la normale rivolta verso l'interno dello spazio S limitato da quelle superficie.

Riferiamo i punti dello spazio ad un sistema di assi coordinati fissi (x, y, z) . Diremo α, β, γ i coseni direttori di n .

Sopra un elemento $d\sigma$ della superficie di C agirà una forza di componenti

$$-p\alpha d\sigma, -p\beta d\sigma, -p\gamma d\sigma,$$



p denotando la pressione del liquido. Consideriamo le componenti della risultante di questo sistema di forze elementari, e i momenti del sistema rispetto agli assi. Una qualunque A di queste sei quantità possiamo rappresentarla mediante la formula

$$(1) \quad A = - \int_{\sigma} p \lambda d\sigma,$$

se intendiamo che λ sia rispettivamente uguale ad

$$\alpha, \beta, \gamma, \\ \gamma y - \beta z, \alpha z - \gamma x, \beta x - \alpha y.$$

Le formule che vogliamo stabilire permettono di operare sopra la (1), senza specificare il significato di λ . Solo occorre tener presente che si ha, in tutti i casi:

$$(2) \quad \int_{\sigma} \lambda d\sigma = 0.$$

Il problema che precisamente ci proponiamo è questo:

Le superficie σ e Σ_0 potranno essere rigide o deformabili, e, se rigide fisse o mobili. Per un periodo di tempo finito T noi supporremo di conoscere, in ogni istante, la configurazione delle superficie σ e Σ_0 , e la loro posizione rispetto agli assi. Conosceremo allora, per tutto il tempo T , e in un punto qualunque P di σ o Σ_0 , la componente secondo la normale

della velocità da cui è animata la particella liquida attigua a P, ossia la quantità

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

u, v, w essendo le componenti di velocità secondo gli assi.

Supporremo inoltre di conoscere *in un determinato istante* t_0 appartenente a T le componenti di velocità u, v, w *in tutto lo spazio* S occupato dal liquido. E noi ci proponiamo di determinare l'azione A *nell'istante* t_0 .

La risoluzione di questo problema richiede essenzialmente la eliminazione delle derivate di u, v, w rispetto al tempo (derivate da cui dipende la pressione); e ciò può farsi mediante la determinazione di un'unica funzione armonica e regolare nello spazio S, *indipendente dal movimento del liquido*.

Se noi volessimo determinare il valore di A in un altro istante t , dovremmo prima determinare i valori di u, v, w al tempo t . Ma i mezzi dell'analisi non consentono, in generale, la risoluzione di questo problema ⁽¹⁾.

3. Sia ψ la funzione regolare e armonica nello spazio S, che nei punti di σ soddisfa alla condizione

$$(3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda,$$

e nei punti di Σ_0 alla condizione

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

La funzione ψ esiste: se infatti diciamo Σ l'insieme delle superficie σ e Σ_0 , vale a dire la superficie totale che limita lo spazio S, i valori assegnati a $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, per le formule (3), (4) e (2), sono tali che si ha:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma = 0.$$

Sarà evidentemente, in virtù della formula (1), e delle (3) e (4):

$$A = - \int_{\Sigma} p \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma,$$

⁽¹⁾ Io evito, insomma, in tutta questa trattazione, il problema fondamentale della Idrodinamica. Dato il movimento del liquido in un istante t_0 , e il movimento delle superficie che lo limitano per un periodo di tempo finito T, io non mi domando come si muoverà il liquido in un istante t di T; ma quali sono le resistenze nell'istante t_0 in cui il movimento del liquido è dato.

ovvero:

$$(5) \quad A = - \int_{\Sigma} p \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \gamma \right) d\Sigma.$$

E se si trasforma l'integrale esteso a Σ in un integrale esteso allo spazio S , di cui Σ è il contorno, tenendo presente che ψ è una funzione armonica:

$$(6) \quad A = \int_S p \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS.$$

Ora:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{dw}{dt}.$$

Dunque:

$$(7) \quad A = - \int_S \left(\frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS.$$

Poniamo:

$$(8) \quad U = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Sarà:

$$(9) \quad \frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ + u \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + w \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right).$$

Seguendo le notazioni consuete noi denotiamo con $\frac{df}{dt}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$, la derivata di una funzione f rispetto al tempo, calcolata seguendo una particella nel suo movimento, o fissando un punto dello spazio; in modo che si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pertanto avremo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z},$$

e formule analoghe per $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$; quindi:

$$u \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + w \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \\ = u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + W,$$

essendo:

$$W = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \\ + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + 2wu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Risolvendo l'equazione (9) rispetto al primo trinomio del 2° membro, e sostituendo al secondo trinomio l'espressione fornita da queste ultime, otterremo:

$$\frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{dw}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = \frac{dU}{dt} - \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} - W,$$

onde la (7) darà:

$$(10) \quad A = - \int_s \frac{dU}{dt} dS + \int_s \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\} dS + \\ + \int_s W dS.$$

Ora si ha, tanto se lo spazio S è fisso, quanto se è variabile:

$$\int_s \frac{dU}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_s U dS.$$

Ma per la formula (8):

$$\int_s U dS = \int_s \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS;$$

quindi, integrando per parti, e tenendo presente la condizione d'incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0:$$

$$(11) \quad \int_s U dS = - \int_{\Sigma} \psi (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\Sigma = - \int_{\Sigma} \psi N d\Sigma.$$

Con una trasformazione analoga, il 2° integrale della formula (10) diventerà uguale a $-\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} N d\Sigma$. Onde avremo infine:

$$(12) \quad A = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \psi N d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t} N d\Sigma + \int_s W dS.$$

Questa formula risolve il problema. V'intervengono infatti le quantità ψ ed N che sono indipendenti dal movimento del liquido; e (nella W) le componenti di velocità u, v, w , ma non le loro derivate rispetto al tempo.

4. È da notare che la formula (12) sussiste anche se nello spazio S vi sono delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, come si riconosce facilmente esaminando le trasformazioni eseguite.

Consideriamo infatti un integrale del tipo

$$J = \int_S \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS,$$

ove F, f, g, h rappresentino funzioni che potranno essere discontinue sopra superficie il cui insieme denoteremo con ω , e delle quali le ultime tre siano legate dalla relazione:

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

Le superficie ω , opportunamente completate, se occorre (per es. se ω è una superficie aperta situata nell'interno di S), con altre che diremo ω_0 , e sulle quali le discontinuità saranno nulle, divideranno lo spazio S in un certo numero m di spazi S_i . E sarà

$$J = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \left(f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} \right) dS_i.$$

L'integrale esteso allo spazio S_i (in cui le funzioni sono continue) potremo trasformarlo in un integrale esteso alla superficie σ_i di S_i . Tenendo presente la relazione (13), e ponendo

$$E = -F \cdot (f\alpha + g\beta + h\gamma),$$

ove α, β, γ denotano, nei punti di σ_i , i coseni della normale interna, avremo:

$$J = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i} E d\sigma_i.$$

Ora l'insieme delle superficie σ_i è formato dalla superficie Σ che limita l'intero spazio S , e dalle due faccie delle superficie ω ed ω_0 . Ma nei punti delle superficie ω_0 , E ha, dalle due parti, valori uguali e di segno contrario, essendo ivi continue le F, f, g, h , ed essendo uguali e di segno contrario i coseni delle due normali; onde le superficie ω_0 non interverranno nella espressione di J . Se dunque nei punti di ω diciamo E ed E' i valori di E dalle due parti, si avrà:

$$J = \int_{\Sigma} E d\Sigma + \int_{\omega} (E' + E'') d\omega.$$

Se poi la funzione F è continua nei punti di ω , e le funzioni f, g, h sono tali che la quantità $f\alpha + g\beta + h\gamma$ abbia dalle due parti di ω valori uguali e di segno contrario, sarà $E' + E'' = 0$, quindi

$$J = \int_{\Sigma} E d\Sigma.$$

come nel caso che non esistano discontinuità.

Questo appunto accade nelle trasformazioni d'integrali eseguite nel § 3: precisamente nella (5-6) $(F = p; f, g, h = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z})$, nella (8-11) $(F = \psi; f, g, h = u, v, w)$, e nell'altra analoga alla precedente $(F = \frac{\partial\psi}{\partial t})$. La pressione p è infatti continua nello spazio S ; la funzione ψ è continua con tutte le sue derivate; e se vi sono superficie su cui la velocità è discontinua, la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ ha, secondo le due normali, valori uguali e di segno contrario.

5. Particolarmente interessante è il caso che il corpo C si muova di moto traslatorio uniforme, e che la superficie Σ_0 sia fissa.

La velocità normale N è allora nulla sopra Σ_0 , e i due primi integrali della formula (12) risultano estesi alla sola superficie σ di C . Se poi supponiamo che il corpo si muova parallelamente all'asse delle x con velocità V_0 , sarà sopra $\sigma N = V_0\alpha$; onde avremo:

$$(14) \quad A = V_0 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \psi \alpha d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial t} \alpha d\sigma \right\} + \int_S W dS.$$

Ma la quantità entro parentesi, per una formula dimostrata nella prima delle due Note precedenti a questa (§ 2), è uguale ad $\int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} N d\sigma$, ossia a $V_0 \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} \alpha d\sigma$. Denotiamo poi le componenti di velocità, anziché con u, v, w , con $V_0 u, V_0 v, V_0 w$ (supposto $V_0 \geq 0$). Volendo conservare a W la sua espressione $u^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dots$ dovremo nella ultima formula sostituire W con $V_0^2 \cdot W$; si avrà pertanto:

$$A = V_0^2 \left\{ \int_{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x} \alpha d\sigma + \int_S W dS \right\};$$

e denotando con $-K$ il coefficiente di V_0^2 , che non dipende da V_0 (bensì dalla configurazione del sistema, e dal movimento del liquido nell'istante t_0):

$$A = -K \cdot V_0^2.$$

Possiamo chiamare *simili* quei movimenti i quali (nell'istante t_0 a cui si riferisce A) si ottengono uno dall'altro moltiplicando le componenti di velocità per una costante. Noi vediamo dunque che *per movimenti simili il valore di A è proporzionale al quadrato della velocità del corpo mobile.*

Sembra sia questa l'espressione più generale della legge di proporzionalità fra l'azione A — in particolare la componente della forza secondo la direzione del movimento, o *resistenza diretta* — e il quadrato della velocità del corpo; legge confermata, entro certi limiti, dall'esperienza ⁽¹⁾.

Supponiamo che A rappresenti la resistenza diretta; e confrontiamo un movimento M col movimento *simile* M' ottenuto invertendo le velocità di tutte le particelle liquide. Dovrà cambiare di segno la velocità V_0 di C, ma V_0^2 e K non varieranno; e perciò non varierà, nè di grandezza, nè di segno, la resistenza A. Quindi avverrà o che A sia nulla per ambedue i movimenti, o che per uno di essi la resistenza abbia lo stesso senso del movimento del corpo.

Questo risultato è da considerarsi come un'estensione del noto *paradosso di D'Alembert*.

Si deve però tener presente che le formule qui stabilite valgono per qualunque movimento della massa liquida *compatibile col dato movimento del corpo C*; mentre i valori del coefficiente K forniti dalle osservazioni si riferiscono a quei movimenti particolari che sono *provocati dal movimento stesso di C*. Per tali movimenti K risulta positivo.

6. Se oltre ad esser fissa la superficie Σ_0 è anche immobile il corpo C, la formula (14); posto $V_0 = 0$, darà:

$$(15) \quad A = \int_S W dS.$$

In questo caso, se noi confrontiamo due movimenti simili della massa liquida, poichè W e quindi A risultano moltiplicate per il quadrato della costante per cui si moltiplicano le componenti di velocità, avremo che i valori di A stanno tra loro come i quadrati della velocità in uno stesso punto dello spazio.

7. Si può dare di W un'espressione molto semplice.

In un punto qualunque dello spazio S siano, al tempo t_0 , a, b, c , i coseni di direzione della velocità, e sia V la sua grandezza. Sarà $u = Va$, $v = Vb$, $w = Vc$, quindi:

$$W = V^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} a^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} bc + \dots \right).$$

Ma la quantità entro parentesi non è altro che la derivata seconda della

⁽¹⁾ V. Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIII, an. 1907.

funzione ψ rispetto alla direzione della velocità. Designando questa con v avremo:

$$W = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}.$$

8. Un'altra espressione si può dare della quantità W , e perciò di A .

Essendo $U = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z}$, sarà identicamente:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &+ \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ &+ \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + W. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

denotiamo cioè con ξ, η, ζ le componenti del vortice. I coefficienti di $\frac{\partial \psi}{\partial x}$,

$\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, nella formula precedente, sono uguali ad

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} - (v\zeta - w\eta), \text{ ecc. } (V^2 = u^2 + v^2 + w^2).$$

Si avrà per conseguenza da quella formula, risolta rispetto a W :

$$W = u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} + D,$$

ove:

$$D = (v\zeta - w\eta) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (w\xi - u\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (u\eta - v\xi) \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

ovvero:

$$D = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

9. Supponiamo, come nel § 6, che le superficie σ e Σ_0 siano fisse. Varrà allora la formula (15), da cui, sostituendo a W l'espressione trovata, otterremo:

$$A = \int_s \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) dS - \\ - \frac{1}{2} \int_s \left(\frac{\partial V^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dS + \int_s D dS.$$

Se rappresentiamo con ω l'insieme delle superficie sulle quali la velocità è discontinua, potremo eseguire sopra i due primi integrali la trasformazione esaminata nel § 4, ed avremo

$$A = \int_{\Sigma} E d\Sigma + \int_{\omega} (E' + E'') d\omega + \int_s D dS,$$

essendo ora

$$(16) \quad E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n} - UN.$$

Nei punti di Σ n denota la normale interna (§ 2). Nei punti di ω n rappresenta sia l'una che l'altra normale, N è la componente della velocità secondo n , E' ed E'' sono i valori di E dalle due parti (§ 4).

Ma osserviamo che nei punti di Σ , ossia delle superficie σ e Σ_0 , che abbiamo supposte fisse, $N = 0$, quindi $E = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n}$. Inoltre sopra σ $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda$, sopra Σ_0 $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ (§ 3). Onde sarà:

$$(17) \quad A = \frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \lambda d\sigma + \int_{\omega} (E' + E'') d\omega + \int_s D dS.$$

Se lo spazio S non è semplicemente connesso, la massa liquida potrà essere in movimento senza che si abbiano nè superficie di discontinuità ω , nè vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$, $D = 0$). In tal caso avremo

$$(18) \quad A = \frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \lambda d\sigma;$$

la quale formula poteva ottenersi direttamente dalle (1) e (2), essendo allora $p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{cost.}$

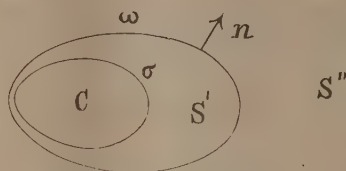
10. Altro caso notevole è il seguente.

Si abbia nello spazio S una superficie di discontinuità ω , chiusa, e che contenga C nel suo interno, la quale superficie potrà anche, in parte,

coincidere con σ . Noi ci avviciniamo così a quello che realmente accade nel caso di un corpo fisso investito da una corrente.

Diciamo S' lo spazio compreso fra σ ed ω , S'' quella compreso fra ω e Σ_0 . Nello spazio S' , e nell'istante t_0 a cui ci riferiamo, il liquido sia in quiete; nello spazio S'' (che supporremo a connessione multipla) il moto sia irrotazionale.

Potremo applicare la formula (17), in cui si dovrà porre $D = 0$, mancando i vortici in tutto lo spazio S . Inoltre, poichè nello spazio S' non si



ha movimento, ed è nulla per conseguenza tanto la velocità V quanto la funzione U , sarà nullo l'integrale esteso a σ , e nell'integrale esteso ad ω sarà $E' = 0$, se intendiamo che E' si riferisca alla faccia di ω rivolta verso S' . Quanto ad E'' , poichè nei punti di ω la componente normale della velocità è nulla (il liquido essendo in quiete nello spazio S'), avremo dalla formula (16) $E'' = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n}$, ove s'intende che V rappresenti la velocità sulla faccia esterna di ω , n la normale esterna. Onde sarà per la (17):

$$A = \frac{1}{2} \int_{\omega} V^2 \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega.$$

Se ω viene a coincidere con σ , ove $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \lambda$, ritroviamo la formula (18).

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota I
del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

È noto che sopra una curva algebrica C , non può esistere un'infinità continua di sistemi lineari (completi) d'integrali abeliani di 1^a specie, riducibili ⁽¹⁾.

Picard e Poincaré hanno da tempo indicato esempi di curve di genere $p > 1$, possedenti un'infinità discontinua d'integrali ellittici (integrali con due periodi ridotti) ⁽²⁾. In questa Nota mi propongo di mostrare l'esistenza di curve contenenti infiniti sistemi lineari di $q (\geq 1)$ integrali con $2q$ periodi ridotti; e ciò anche all'infuori dei sistemi che s'ottengono ovviamente, sulle curve di Picard-Poincaré, combinando linearmente a due a due, a tre a tre, ecc., i loro integrali ellittici. Resta però sottinteso che, nel caso $q > 1$, non potrà essersi, come accade sempre per $q = 1$, che ognuno degli infiniti sistemi sia riducibile al genere q ⁽³⁾, cioè che provenga da un'involuzione di genere q della curva sostegno, giacchè si sa anzi che non può esistere una curva algebrica con infinite involuzioni irrazionali di genere $q > 1$ ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Pei concetti fondamentali relativi agl'integrali riducibili, veggansi, ad es., le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908). Ved. in particolare a pagina 340.

⁽²⁾ Picard, *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes*, etc. (Bulletin de la Société math. de France, tom. XI, 1883, pag. 25) pag. 47; Poincaré, *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (Comptes rendus, tom. 99, 1884, pag. 853); *Sur les fonctions abéliennes* (American Journal, tom. 8, 1886, pag. 289).

⁽³⁾ Nel trattato di Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903) pag. 493; e nelle mie *Lezioni* citate, q integrali indipendenti, di 1^a specie, di una curva C di genere $p (> q)$ diconsi *riducibili al genere q* , quando, mediante una sostituzione razionale, essi possono mutarsi nei q integrali di 1^a specie di una curva di genere q . Poincaré invece adotta questa locuzione anche quando si sappia soltanto che i q integrali hanno $2q$ periodi ridotti. In generale ciò non porta l'esistenza su C di un'involuzione di genere q , di gruppi di punti, ma sibbene l'esistenza di un'involuzione *abeliana*, sulla varietà dei gruppi di q punti di C .

⁽⁴⁾ De Franchis, *Un teorema sulle involuzioni irrazionali* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. 36, 1913, pag. 368). Noterò di passaggio che oltre alla via, del resto assai semplice, indicata dal De Franchis, per stabilire la citata proposizione, si può seguire quest'altra. È chiaro (formola di Zeuthen) che le involuzioni di genere $q > 1$, sopra una C di genere p , hanno l'ordine limitato. Ma poichè le corrispondenze di dati indici, sopra una curva, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui (ved. il lemma geometrico al n. 4 della mia Memoria, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica*, Math.

Darò qui un cenno della via seguita e dei risultati ottenuti nel presente lavoro.

Per brevità un sistema lineare d'integrali riducibili, i cui periodi ridotti sieno in numero doppio a quello degl'integrali indipendenti contenuti nel sistema, si dirà un sistema *regolare*. Esso è necessariamente completo ⁽¹⁾.

Se sulla curva C , di genere p , esistono due sistemi regolari d'integrali riducibili, si presenta spontanea la considerazione del loro sistema lineare « congiungente » K , e del loro sistema lineare « intersezione » H . Poggiandomi sulle ricerche di Castelnuovo intorno alle varietà di Picard ⁽²⁾ e sopra una disuguaglianza fra il numero degl'integrali indipendenti (di 1^a specie) di un sistema d'integrali riducibili ed il numero dei loro periodi ridotti ⁽³⁾, dimostro che i sistemi H , K sono regolari, come i due sistemi dati (n. 1).

Ciò posto, si rappresentino gli ∞^{p-1} integrali di 1^a specie di C ⁽⁴⁾, coi punti di uno spazio lineare S_{p-1} , sicchè i sistemi regolari d'integrali riducibili, abbiano per immagini certi spazî lineari di S_{p-1} . Dalla proposizione riferita, segue subito che gli spazî successivamente dedotti, mediante proiezioni e sezioni, a partire da un gruppo di spazî immagini di più sistemi regolari, rappresentano nuovi sistemi regolari.

Ne deriva un'immediata ed elegante dimostrazione geometrica del teorema di Poincaré, circa l'esistenza d'infiniti integrali ellittici sopra una curva di genere p , che possenga $\mu + 1$ integrali ellittici dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) ⁽⁵⁾. Nel caso $\mu = 3$, per esempio, sul piano rappresentativo del

Annalen, Bd. 74, 1913); così ne segue, in forza di un noto teorema di Humbert-Castelnuovo, che le involuzioni di genere > 1 sono esse pure in numero finito.

A proposito della mia Memoria citata dei Math. Annalen, colgo l'occasione per avvertire che negli enunciati dei nn. 19 e 20, relativi ad una corrispondenza T variabile colla curva generica di un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^2 , sopra una superficie, regolare o irregolare, F , va aggiunto in modo esplicito che, qualora $|C|$ sia composto con una involuzione I_n , la corrispondenza T non deve far parte della corrispondenza simmetrica $S(n-1, n-1)$, generata da I sopra ogni C . Del resto la dimostrazione del n. 19 esclude in modo evidente questo caso, da che in essa si suppone che il luogo dei punti omologhi di un dato x nelle T relative alle ∞^1 curve della rete $|C|$, che passan per x , sia una curva; mentre nel caso da escludersi, il luogo suddetto ridurrebbesi ad un gruppo di punti. I teoremi dei nn. 19, 20 valgono evidentemente, anche senza quest'esclusione esplicita, purchè si riferiscano a sistemi lineari *semplici* $|C|$, almeno ∞^2 .

⁽¹⁾ Cfr. le mie *Lezioni*, pag. 340.

⁽²⁾ Castelnuovo, *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5), tom. XIV, 1905, pag. 593).

⁽³⁾ Ved. le mie *Lezioni*, pag. 338.

⁽⁴⁾ Consideriamo come identici due integrali che differiscano per una costante, additiva o moltiplicativa.

⁽⁵⁾ *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 305; Krazer (trattato citato), pag. 489.

sistema che congiunge i 4 integrali ellittici dati, si hanno 4 punti, a tre a tre indipendenti, A_1, A_2, A_3, A_4 , immagini di quei 4 integrali. Orbene, le intersezioni a due a due delle rette congiungenti due degli A , o due dei nuovi punti che da essi via via deduconsi (rete di Möbius), rappresentano infiniti integrali ellittici contenuti nel sistema.

In generale si trova (restringendo leggermente la portata del teorema del n. 4) che se una curva C , di genere p , possiede $\mu + 1 (\geq 3)$ sistemi regolari, a μ a μ indipendenti, d'integrali riducibili, tali che uno, A , di essi, di dimensione $q - 1 (\geq 0)$, sia contenuto nel sistema che congiunge gli altri, la curva contiene un'infinità discontinua di sistemi analoghi ad A . Resta anche ben determinata la struttura di tale infinità, poichè si prova che quei sistemi possono coordinarsi biunivocamente ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$ (individuata da $\mu + 1$ punti a μ a μ indipendenti di un $S_{\mu-1}$). Va considerato in modo speciale soltanto il caso $\mu = 2$, perchè allora il gruppo degli spazi rappresentativi dei tre dati sistemi, non è capace di definirne altri, come A , mediante operazioni *interne* di proiezione e sezione. Ma da $\mu = 2$ si risale agevolmente a $\mu = 3$, con un'opportuna operazione di *ampliamento* (n. 2) del sistema congiungente i tre dati. La rete di Möbius (di specie 1) coordinata alla totalità dei sistemi regolari ∞^{q-1} esistenti su C , è allora costituita dai punti d'una retta derivanti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Allorquando i $\mu + 1$ sistemi dati sieno della stessa dimensione $q - 1$ — e a questo caso ci si può sempre ridurre — gl'infiniti sistemi regolari che da essi derivano, costituiscono quella che chiamo una *configurazione normale di sistemi d'integrali riducibili*. Tale configurazione è studiata al n. 5 (Nota II) ove si determina anche il minimo continuo, cui appartengono tutti i suoi sistemi regolari.

Naturalmente questi risultati possono riferirsi, non soltanto agl'integrali abeliani propriamente detti, ma anche agl'integrali semplici di prima specie d'una varietà. Basta considerare, in luogo d'una varietà di Jacobi, una varietà di Picard.

Il n. 7 (Nota II) è dedicato a stabilire l'esistenza effettiva di varietà (o curve) algebriche soddisfacenti ai teoremi sopra riferiti. E nel n. 8 (Nota II) espongo infine una dimostrazione analitica del teorema generale del n. 4.

1. SISTEMI CONGIUNGENTE E INTERSEZIONE DI DUE DATI SISTEMI REGOLARI. SISTEMI COMPLEMENTARI. — Sia V una varietà di Picard (o di Jacobi) a p dimensioni, la quale possieda due sistemi regolari A_1, A_2 , contenenti rispettivamente q_1, q_2 integrali riducibili di prima specie, indipendenti.

Gli integrali di A_1 sono allora costanti lungo le varietà *algebriche* W' a $p - q_1$ dimensioni di un sistema ∞^{q_1} , d'indice 1, appartenente a V ⁽¹⁾, e, similmente, le varietà W'' , di livello costante degli integrali di A_2 , sono algebriche, a $p - q_2$ dimensioni, e formano un sistema ∞^{q_2} , pure d'indice 1.

Sulla varietà *algebraica* W a $d (\leq p)$ dimensioni, riempita dalle W' che escono dai punti di una W' genericamente fissata, son costanti tutti gli integrali eventualmente comuni ai due sistemi, giacchè essi lo sono tanto lungo le W' come lungo le W'' .

Pel teorema di Castelnuovo, or ora citato a pie' di pagina, ne deriva che il sistema, evidentemente lineare, formato da tutti gli eventuali integrali comuni ai due sistemi A_1, A_2 , è regolare. Dunque:

Il sistema intersezione di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

Passiamo a considerare il sistema congiungente dei due dati sistemi A_1, A_2 , cioè il minimo sistema lineare d'integrali semplici di 1^a specie di V , che li contiene entrambi.

Qualora si rappresenti il sistema lineare S degli ∞^{p-1} integrali di V , coi punti di uno spazio S , a $p - 1$ dimensioni, e s'indichino colle stesse lettere A_1, A_2 gli spazî a $q_1 - 1$ ed a $q_2 - 1$ dimensioni, immagini dei sistemi A_1, A_2 , il sistema intersezione H ed il sistema congiungente K , verranno rappresentati rispettivamente dallo spazio intersezione H e dallo spazio congiungente K di A_1, A_2 .

Sicchè le dimensioni $r - 1$ ed $s - 1$ di H, K saranno legate alle dimensioni di A_1, A_2 dalla relazione

$$r + s = q_1 + q_2,$$

e, se non esiste H , il sistema K avrà la dimensione $q_1 + q_2 - 1$.

Consideriamo anzitutto il caso in cui H manchi. Allora scrivendo i periodi di una combinazione lineare generica degli integrali di A_1, A_2 , cioè di un integrale generico di K , si vede subito che K è un sistema di $q_1 + q_2$ integrali indipendenti con al più $2(q_1 + q_2)$ periodi ridotti. Diciamo « al più », perchè *a priori* potrebbe dubitarsi che questi periodi fossero ulteriormente riducibili.

Ma se si ricorda che il doppio del numero degli integrali indipendenti (di 1^a specie) contenuti in un dato sistema lineare d'integrali riducibili, non può mai superare il numero dei periodi ridotti ⁽²⁾, si conclude che i pe-

(¹) Che le W' sieno *algebriche* risulta da un teorema di Picard, contenuto nel lavoro citato. Viceversa Castelnuovo ha dimostrato che, se q_1 integrali semplici di 1^a specie di V si mantengono costanti lungo una curva o superficie o varietà algebrica, essi individuano un sistema regolare ∞^{q_1-1} . Ved. Nota citata, pag. 594.

(²) *Lezioni*, pag. 338.

riodi ridotti, ulteriormente irriducibili, degl'integrali di K , son proprio in numero di $2(q_1 + q_2)$, e quindi che K è regolare.

Prima di passare ad esaminare il caso in cui H esista, convien premettere la nozione di *sistema complementare* (regolare) di un dato sistema regolare.

Picard ⁽¹⁾ e Poincaré ⁽²⁾ hanno dimostrato che, se una varietà con p integrali semplici di 1^a specie, possiede q_1 integrali semplici di 1^a specie riducibili, a $2q_1$ periodi ridotti, essa possiede in conseguenza un sistema di $p - q_1$ integrali di 1^a specie con $2(p - q_1)$ periodi ridotti.

E di più i due sistemi (regolari) non hanno alcun integrale comune, sicchè sono rappresentati in S da due spazi duali, indipendenti. Due sistemi siffatti si chiameranno *complementari* l'uno dell'altro. Non è però detto che un sistema regolare individui il suo complementare (n. 4 Oss.); comunque ciò non pregiudica affatto le nostre ulteriori considerazioni.

Un sistema regolare M , di dimensione $d - 1$, il quale sia contenuto in un altro sistema regolare N , di dimensione $l - 1$ ($l > d$), ammette anche entro N un sistema complementare, di dimensione $l - d - 1$, cioè un sistema regolare ∞^{l-d-1} , non avente con M alcun integrale comune. Esso non è altro che l'intersezione di N col complementare di M , entro al sistema totale S .

Ciò premesso, si esaurisce subito anche il caso in cui esista il sistema intersezione H dei due dati sistemi regolari A_1, A_2 . Costruiscasi in A_1 un sistema B_1 , di dimensione $q_1 - r - 1$, complementare di H : B_1 è indipendente da H e quindi anche da A_2 . Ed è chiaro che il sistema K , congiungente A_1 ed A_2 , coincide con quello che congiunge B_1 ed A_2 . Dall'esame del caso precedente, segue pertanto che K è esso stesso un sistema regolare. E si conclude:

Anche il sistema congiungente di due dati sistemi regolari d'integrali riducibili, è regolare.

2. AMPLIAMENTO DI UN SISTEMA REGOLARE. — Se la varietà picardiana V , di dimensione p , possiede un sistema regolare A , ∞^{q-1} , d'integrali riducibili, si può sempre costruire una picardiana W , di dimensione q , a cui spettino quegli integrali, cioè tale che gl'integrali semplici di 1^a specie di W , abbiano gli stessi periodi degl'integrali appartenenti ad A . I punti di W sono le immagini delle ∞^q varietà tracciate su V , lungo cui sono costanti quegli integrali ed il punto corrente su W è funzione razionale del punto corrente su V .

⁽¹⁾ Memoria cit. pag. 43. Ivi trovasi il teorema cui si allude nel testo per le curve di genere 2.

⁽²⁾ *Sur les fonctions abéliennes* (cit.), pag. 302. Ved. pure, Castelnuovo, loc. cit., pag. 598.

Posto ciò, consideriamo un'altra picardiana W' di dimensione q' e sia Φ la picardiana, di dimensione $q + q'$, che rappresenta la varietà delle coppie di punti di W, W' . La Φ contiene due sistemi regolari complementari, rispettivamente di ∞^{q-1} e $\infty^{q'-1}$ integrali riducibili: i primi hanno gli stessi periodi ridotti degli integrali di W , ossia di A , e i secondi gli stessi periodi ridotti degli integrali di W' .

Si è così costruito un sistema regolare più ampio B , $\infty^{q+q'-1}$, cui appartiene un sistema regolare *identico* al dato sistema $\infty^{q-1} A$. E quando parliamo di sistemi « identici » d'integrali riducibili, intendiamo alludere a sistemi i cui elementi (integrali) si possono riferire (omograficamente) per guisa che due integrali corrispondenti abbiano gli stessi periodi ridotti. Due varietà di Picard, di dimensione q , a cui spettino rispettivamente due dati sistemi regolari ∞^{q-1} , fra loro identici, sono birazionalmente equivalenti.

Diremo per ciò che *il sistema regolare B è un ampliamento del sistema regolare A , ottenuto per proiezione dal sistema lineare degli integrali di W' .*

3. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI POINCARÉ, RELATIVO ALLE CURVE (O VARIETÀ) CON INFINITI INTEGRALI ELLITTICI. — Dalle proposizioni del n. 1 discende che se, entro alla totalità S degli ∞^{p-1} integrali semplici di 1^a specie di una varietà algebrica V , esistono più sistemi regolari d'integrali riducibili, *ogni sistema lineare dedotto da essi con operazioni interne di proiezione e di sezione, è un sistema regolare d'integrali riducibili.*

Supponiamo che V possenga $\mu + 1$ integrali ellittici $u_1, u_2, \dots, u_{\mu+1}$, linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$). Senza introdurre un'effettiva restrizione, si può ritenere che fra i suddetti integrali non se ne trovino mai μ dipendenti fra loro.

Il sistema regolare congiungente quegli integrali, ha perciò la dimensione $\mu - 1$, e viene rappresentato da uno spazio lineare K , in cui sono segnati $\mu + 1$ punti $u_1, u_2, \dots, u_{\mu+1}$, a μ a μ indipendenti, imagini dei dati integrali. A partire allora da quei $\mu + 1$ punti, con operazioni interne di proiezione e di sezione, se ne possono ottenere infiniti altri (com'è ben noto, si ottengono così tutti e soli i punti « razionali » rispetto al gruppo dei $\mu + 1$ dati, i quali si assumano come vertici della piramide fondamentale delle coordinate proiettive). Si conclude pertanto col teorema di Poincaré:

Se una varietà (o curva) algebrica con p integrali semplici di 1^a specie, contiene $\mu + 1$ integrali ellittici linearmente dipendenti ($p \geq \mu \geq 2$) ne contiene infiniti altri.

Nel caso $\mu = 3$, come già abbiamo detto nell'introduzione, gl'infiniti integrali ellittici vengono rappresentati dai vertici della rete di Möbius che, sul piano rappresentativo K , è definita dai punti, a 3 a 3 indipendenti, imagini dei 4 integrali ellittici dati. Le rette della rete corrispondono a

sistemi regolari di 2 integrali riducibili con 4 periodi. Se a è una retta della rete, il corrispondente sistema ∞^1 contiene alla sua volta infiniti integrali ellittici, rappresentati dai vertici della rete che cadono su a . Tali vertici, come si sa, s'ottengono tutti da tre di essi, mediante successive costruzioni di quarti armonici.

Nel caso di μ qualunque, potremo similmente dire che gl'infiniti integrali ellittici vengono coordinati ai vertici di una rete di Möbius di specie $\mu - 1$, avente come base un gruppo di $\mu + 1$ punti a μ a μ indipendenti. Le rette, i piani, ..., gli $S_{\mu-2}$ della rete, rappresentano rispettivamente sistemi regolari di 2 integrali con 4 periodi, di 3 integrali con 6 periodi, ..., di $\mu - 1$ integrali con $2(\mu - 1)$ periodi; e su ognuno degli spazî subordinati della rete, il quale abbia la dimensione k ($k = 1, 2, \dots, \mu - 2$), resta subordinata una rete di Möbius di specie k , i cui elementi rappresentano sistemi regolari d'integrali riducibili. In particolare sopra una retta della rete si hanno, come prima, infiniti punti immagini d'integrali ellittici, i quali s'ottengono tutti da 3 di essi, mediante costruzioni di quarti armonici. Una tal totalità di punti si chiamerà brevemente una rete di Möbius di specie 1, avente come base una terna di punti (allineati).

Osservazione. — La dimostrazione esposta cade in difetto nel caso estremo $\mu = 2$, perchè allora lo spazio K riducesi ad una retta, su cui sono segnati 3 punti distinti u_1, u_2, u_3 . E da questi non se ne possono dedurre altri, con operazioni interne di proiezione e di sezione. Tuttavia proveremo che anche in tal caso la varietà V possiede infiniti integrali ellittici, rappresentati dai punti della rete di Möbius di specie 1, definita da (u_1, u_2, u_3) .

A tale scopo si operi l'ampliamento del sistema K , mediante proiezione di questo sistema da un integrale ellittico u_1 identico ad u_3 (n. 2), talchè la varietà Φ del n. prec., verrà in tal caso ad esser la varietà delle terne dei punti tolti da tre curve ellittiche $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, alle quali spettino rispettivamente tre integrali identici ad u_1, u_2, u_3 . Il sistema ampliato ∞^2, B , contiene un sistema (identico a) K e un altro sistema ∞^1, L , congiungente u_3 ed u_4 . Ed è evidente che ad L appartengono infiniti integrali ellittici, ottenibili tutti combinando linearmente u_3, u_4 , mediante coefficienti interi (o razionali).

Se pertanto sul piano B , immagine di B , si segnano le rette K, L (le quali si incontrano in u_3), uno, u_5 , degl'infiniti punti di L (diversi da u_3, u_4), che rappresentano integrali ellittici, costituirà insieme ad u_1, u_2, u_4 una quaterna d'integrali ellittici, e tre a tre indipendenti. Saremo perciò ricondotti al caso $\mu = 3$, e si concluderà che la retta K , appartenente alla rete definita da (u_1, u_2, u_4, u_5) , contiene infiniti vertici della rete stessa, formanti una rete di Möbius di specie 1; il che dimostra appunto quanto abbiamo asserito.

Matematica. — *Sull'operatore differenziale binario S di M. Pieri.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sui moti turbolenti provocati da solidi immersi.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Mostra l'esperienza che il movimento di un liquido, scorrente entro un tubo, può aver luogo in condizioni di regime, alquanto differenti fra loro: *il regime di Poiseuille e il regime idraulico.*

Se il liquido scorre molto lentamente in un tubo rettilineo, i filetti liquidi si mantengono sensibilmente paralleli alle pareti, senza mescolarsi gli uni cogli altri. È il *regime di Poiseuille*. Esso può caratterizzarsi analiticamente sfruttando le equazioni idrodinamiche di Navier per i liquidi viscosi, ridotte ai soli termini lineari, nelle componenti della velocità e loro derivate. Il regime di Poiseuille è stabile fino a che la velocità del liquido non passa un certo limite (*velocità critica*), di là del quale, esso è ancora possibile, ma cessa di essere stabile.

Considerazioni di omogeneità ad esperienze sistematiche hanno condotto Reynolds a ritenere che la velocità critica sia inversamente proporzionale al diametro del tubo e alla densità del liquido, e direttamente proporzionale al coefficiente di viscosità. In modo preciso, detti: ϱ la densità del liquido, k il coefficiente di viscosità, d il diametro di una sezione trasversale del tubo, V la velocità media nella sezione stessa, la instabilità del regime di Poiseuille incomincia a manifestarsi quando il rapporto (*rapporto di Reynolds*)

$$\frac{\varrho dV}{k}$$

assume un certo valore, che esperienze di Hagen, Couette e Reynolds stesso hanno concordemente stabilito eguale a circa 2000 in unità (C. G. S.). Detta V_c la velocità critica, si ha dunque sensibilmente

$$V_c = 2000 \frac{k}{\varrho d}.$$

A partire da questa velocità, l'andamento regolare dei filetti — caratteristico del regime di Poiseuille — si modifica alquanto; questi tendono

a confondersi insieme e a diffondersi in tutta la massa liquida effluente nel tubo, per dar luogo infine al *regime idraulico*. Questo nuovo regime non si stabilisce immediatamente dopo V_c , ma a partire da una velocità superiore, cioè di circa $1,2 V_c$. Per velocità comprese in questo intervallo, sono *a priori* possibili entrambi i regimi; ma sono entrambi instabili.

Trattandosi di moti *non più lenti*, per lo studio analitico del fenomeno più non è sufficiente di ricorrere alle equazioni di Navier, ridotte ai soli termini lineari.

È questa la principale circostanza per cui lo studio teorico dei moti turbolenti è appena abbozzato ⁽¹⁾, e si è ancora in attesa di una soddisfacente giustificazione idromeccanica delle risultanze sperimentali.

Ciò premesso, veniamo alla questione che forma oggetto della presente Nota.

2. Si consideri un solido sferico, immerso in un liquido viscoso indefinitamente esteso. La sfera sia dotata di un moto rettilineo con velocità V ; il suo moto si comunica alla massa fluida circostante.

Con qual legge?

Quando si tratta di una lenta traslazione del solido, a questa domanda risponde esaurientemente la classica soluzione di Stokes pel caso permanente, e una altrettanto esauriente soluzione nel caso, più generale, di una traslazione con velocità variabile ⁽²⁾.

L'elemento dinamico saliente che caratterizza, si può dire, il *regime di Stokes* è la resistenza opposta alla sfera dalla massa liquida, e il cui valore assoluto è — com'è ben noto — definito dalla formula

$$R = 6\pi a k V \quad (a = \text{raggio della sfera}).$$

Per la trattazione analitica, ancor qui (come già per l'efflusso lento entro tubi), trattandosi di moti lenti, si è autorizzati ad usufruire delle equazioni di Navier, ridotte alla forma lineare.

Che cosa accade quando non si è più nel regime di Stokes? Quando cioè la velocità della sfera più non è lenta?

Dal punto di vista matematico, il problema esigerebbe l'integrazione delle equazioni di Navier, rigorose e non più approssimate. Ci si imbatte

⁽¹⁾ Cfr. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur Hydrodynamischen Erklärung des Turbulenten Flüssigkeitsbewegungen*. Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908, vol. III; Th. v. Karman und H. Rubach, *Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes*, Physikalische Zeitschrift. 1912; Mises, *Kleine Schwingungen und Turbulenz*, Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung, B. XXI (1912); Föppl, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder*, Münch. Sitzungsberichte, 1913.

⁽²⁾ Cfr. Picciati, *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVI (1907).

quindi nella stessa difficoltà accennata più sopra per lo studio dell'efflusso, non più lento, entro tubi ⁽¹⁾.

Dal punto di vista fisico l'intuizione ci dice che deve accadere qualche cosa di analogo a ciò che si verifica per i liquidi scorrenti entro tubi. Ancor qui deve esistere oltre al regime tranquillo (di Stokes), un regime idraulico, e una *velocità critica* della sfera che segna il termine della stabilità di un regime e l'inizio della preparazione ad un nuovo regime.

Scopo della presente Nota è di mostrare, con considerazioni elementari suggerite dai criteri di omogeneità, che queste previsioni trovano una giustificazione teorica.

Tali considerazioni farebbero anzi prevedere la possibilità dell'esistenza di un terzo regime. In modo preciso, i tre regimi sarebbero caratterizzati dal diverso comportamento della resistenza, quale risulta dalle formule seguenti:

$$\begin{aligned} R_1 &= \varphi a k V, \\ R_2 &= \psi \varrho a^2 V^2, \\ R_3 &= \chi \frac{k^2}{\varrho}, \end{aligned}$$

dove φ, ψ, χ dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds:

$$\sigma = \frac{\varrho a V}{k}.$$

Il primo regime corrisponde ad una resistenza proporzionale alla velocità, al raggio della sfera ed al coefficiente di viscosità: è il *regime di Stokes*.

Nel secondo regime — *regime idraulico* — la resistenza varia in proporzione al quadrato della velocità e alla superficie del solido.

Nel terzo regime la resistenza risulta proporzionale al quadrato del coefficiente di viscosità.

Il presentarsi dell'uno o dell'altro di questi regimi, quasi certamente dipende ancor qui — come già nell'efflusso entro tubi — dal valore del rapporto σ di Reynolds.

Il terzo regime (che analoghe considerazioni di omogeneità mettono in luce anche per i liquidi scorrenti entro tubi) non è stato messo in evidenza nelle esperienze di Reynolds. Non è però improbabile che il suo posto spetti a quell'intervallo $V_c, 1.2 V_c$ in cui è stata constatata l'instabilità dei due primi regimi.

⁽¹⁾ Per tentativi di soluzioni approssimate, a partire da quelli di Stokes, cfr. Noether, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel*. Zeitschrift für Math. und Physik, vol. 62 (1913); Oseen, *Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel*. Ark. f. Mat. Astr. och. Fysik 9, n. 16, (1913).

Agli sperimentatori spetta di assodare fino a qual punto le previsioni teoriche trovino conferma nella realtà.

3. Il valore assoluto R della resistenza opposta dalla massa liquida alla traslazione della sfera, sarà, in generale, dipendente dalla densità ρ e dalla viscosità k del liquido, nonchè dal raggio a e dalla velocità V della sfera. Ciò si può mettere in rilievo, scrivendo:

$$(1) \quad R = f(\rho, k, a, V),$$

f designando la incognita legge di dipendenza.

Se si tengono presenti le dimensioni delle cinque quantità fisiche che entrano nella (1), e che, per comodo del lettore, mettiamo in evidenza mediante le rispettive equazioni maxwelliane di dimensioni:

$$[R] = l t^{-2} m; [\rho] = l^{-3} m; [k] = l^{-1} t^{-1} m; [a] = l; [V] = l t^{-1} \\ (l = \text{lunghezze}; t = \text{tempi}; m = \text{masse}),$$

si ottiene da (1), dividendo le lunghezze per λ , i tempi per τ e le masse per μ ,

$$(2) \quad R = f(\lambda^3 \mu^{-1} \rho, \lambda \tau \mu^{-1} k, \lambda^{-1} a, \lambda^{-1} \tau V) \cdot \lambda \tau^{-2} \mu.$$

Come si vede, la f dipende dai quattro argomenti

$$\lambda^3 \mu^{-1} \rho; \lambda \tau \mu^{-1} k; \lambda^{-1} a; \lambda^{-1} \tau V,$$

che si possono rendere puri numeri. Per ciò è necessario e basta che λ, τ, μ vengano fissati in modo che tre degli argomenti anzidetti sieno puri numeri, i quali, senza togliere nulla alla generalità, possiamo assumere $= 1$. Questo si può raggiungere in quattro modi distinti. Si richiede cioè che λ, τ, μ soddisfino ad uno dei quattro sistemi di equazioni seguenti:

$$(I) \quad \lambda \tau \mu^{-1} k = \lambda^{-1} a = \lambda^{-1} \tau V = 1;$$

$$(II) \quad \lambda^{-1} a = \lambda^{-1} \tau V = \lambda^3 \mu^{-1} \rho = 1;$$

$$(III) \quad \lambda^{-1} \tau V = \lambda^3 \mu^{-1} \rho = \lambda \tau \mu^{-1} k = 1;$$

$$(IV) \quad \lambda^3 \mu^{-1} \rho = \lambda \tau \mu^{-1} k = \lambda^{-1} a = 1.$$

Queste danno, rispettivamente, per soluzioni:

$$(I_1) \quad \lambda = a, \quad \tau = a V^{-1}, \quad \mu = a^2 V^{-1} k;$$

$$(II_1) \quad \lambda = a, \quad \tau = a V^{-1}, \quad \mu = a^3 \rho;$$

$$(III_1) \quad \lambda = \rho^{-1} k V^{-1}, \quad \tau = \rho^{-1} k V^{-2}, \quad \mu = \rho^{-2} k^3 V^{-3};$$

$$(IV_1) \quad \lambda = a, \quad \tau = a^2 \rho k^{-1}, \quad \mu = a^3 \rho.$$

Per queste, la (2) diviene rispettivamente:

$$(3) \quad \begin{cases} R_1 = f_1 a k V, \\ R_2 = f_2 \varrho a^2 V^2, \\ R_3 = f_3 \frac{k^2}{\varrho}, \\ R_4 = f_4 \frac{k^2}{\varrho}, \end{cases}$$

avendo posto per brevità:

$$f_1 = f\left(\frac{\varrho a V}{k}, 1, 1, 1\right),$$

$$f_2 = f\left(1, \frac{k}{\varrho a V}, 1, 1\right),$$

$$f_3 = f\left(1, 1, \frac{\varrho a V}{k}, 1\right),$$

$$f_4 = f\left(1, 1, 1, \frac{\varrho a V}{k}\right).$$

Come si vede, i quattro coefficienti, puramente numerici, f_1, f_2, f_3, f_4 , dipendono unicamente dal rapporto di Reynolds

$$\sigma = \frac{\varrho a V}{k}.$$

Matematica. — *Sur le moyen mouvement asymptotique et les solutions périodiques de certaines équations différentielles.*
Nota di ÉMILE COTTON, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans un fort intéressant Mémoire « *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire* » (Annales de l'École normale, 3^e série, tom. 28, 1911) M. T. Levi-Civita a posé la question de l'existence de ce qu'il appelle un *moyen mouvement asymptotique* pour les solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d\theta}{dt} = f(\theta, t)$$

dont le second membre est une fonction régulière (au point de vue du théorème de Cauchy-Lipschitz) périodique par rapport à θ et par rapport à t : il s'agit de savoir si l'on peut trouver un nombre μ tel que toute solution $\theta = \varphi(t)$ de (1) puisse se mettre sous la forme $\varphi(t) = \mu t + \varepsilon(t)$, ε restant borné pour toutes les valeurs de t .

La réponse est affirmative: M. Levi-Civita l'a démontré dans un cas particulier (Mémoire cité, chap. 2) et M. E. E. Levi dans le cas général (Comptes-Rendus, 1911, tom. 153, pag. 799).

La même question, sous une forme bien différente, avait été résolue par H. Poincaré, dans le chapitre XV de son célèbre Mémoire « *Sur les courbes définies par les équations différentielles* » (Journal de mathématiques, 4^{ème} sér. tom. 1., 1885, p. 220).

De plus, l'illustre géomètre a mis en évidence les relations entre les solutions périodiques de (1) et le nombre μ , et a proposé l'étude de ce nombre considéré comme fonction des coefficients de l'équation (1).

La présente Note se rapporte à ces derniers problèmes; son principal objet est une représentation géométrique mettant en évidence l'intérêt du nombre μ pour l'étude de la distribution des diverses solutions périodiques d'une équation

$$(2) \quad \frac{d\theta}{dt} = F(\theta, t, \lambda),$$

de même nature que (1), mais dont les coefficients dépendent d'un paramètre variable λ .

1. — Revenons d'abord à l'équation (1), dont nous supposons le second nombre entièrement déterminé. On peut admettre que les périodes de $f(\theta, t)$ par rapport à θ et par rapport à t sont égales à 2π .

Nous représentons géométriquement les solutions de (1) par des caractéristiques tracées dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires $Ot, O\theta$. Ces caractéristiques s'échangent entre elles par les transformations du groupe discontinu G constitué par les translations amenant l'origine O aux points dont les deux coordonnées sont des multiples de 2π .

La caractéristique passant par le point $A_0 (0, \alpha)$ de l'axe $O\theta$ rencontre la droite $t = 2n\pi$ en un point A_n ; le coefficient angulaire $m_n(\alpha)$ de la droite $A_0 A_n$, joue dans la suite un rôle important.

La démonstration, donnée par H. Poincaré, de l'existence du moyen mouvement asymptotique μ montre que $m_n(\alpha)$ et μ ont même valeur approchée à $\frac{1}{n}$ près par défaut.

Si μ est un nombre rationnel $\frac{r}{s}$, il existe des solutions telles qu'on ait: $\varphi(t) + 2r\pi = \varphi(t + 2s\pi)$.

Ces solutions sont donc des *solutions périodiques*, le mot étant entendu au sens large que lui a donné H. Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. I, p. 80): parmi les caractéristiques correspondantes, il en est qui admettent les transformations d'un sous-groupe de G . Toutes les solutions peuvent être périodiques; s'il en est de non périodiques, elles sont asymptotes à une solution péri-

dique. Avec la représentation des caractéristiques sur un tore dont H. Poincaré fait usage, il correspond un cycle à une solution périodique, et un cycle limite à une solution périodique isolée. Réciproquement si (1) admet une solution périodique, μ est rationnel.

2. — Considérons maintenant l'équation (2), dont les coefficients dépendent du paramètre λ . Nous supposons que si λ varie dans un intervalle, d'où nous ne le ferons pas sortir, cette équation jouit des mêmes propriétés que l'équation (1). Nous admettrons même que $F(\theta, t, \lambda)$ est une *fonction analytique*.

La caractéristique issue du point $A_0(O, \alpha)$ coupe la droite $t = 2n\pi$ (n entier) en un point appelé plus haut, A_n , qui varie maintenant avec λ ; désignons donc par $m_n(\alpha, \lambda)$ le coefficient angulaire de la droite $A_0 A_n$. Nous représenterons la variation de $m_n(\alpha, \lambda)$ par une surface S_n dont l'équation, rapportée à trois axes rectangulaires $O\alpha, O\lambda, Oz$, sera $z = m_n(\alpha, \lambda)$.

Cette surface se transforme en elle même par la translation parallèle à $O\alpha$ d'amplitude 2π . C'est d'ailleurs une surface analytique, ainsi que le montre un théorème de Poincaré (*Méthodes nouvelles*, tom. 1, pag. 58). Si le

plan $z = \frac{p}{n}$ (p étant entier) coupe la surface S_n suivant une ligne réelle C_{pn} , cette courbe est une ligne analytique. À chacun de ses points correspond un système de valeurs de α et de λ , une équation (2) et une caractéristique bien déterminées; cette caractéristique admet l'une des transformations de G : elle correspond donc à une solution périodique pour laquelle le moyen mouvement asymptotique $\mu = \frac{p}{n}$.

D'ailleurs, lorsque $p = 0$, la courbe C_{pn} en question est identique à celles considérées par Poincaré dans la recherche des solutions périodiques (au sens restreint du mot) de l'équation (2).

En même temps que la surface S_n , nous considérerons la surface Σ définie par $z = \mu(\lambda)$, qui représente la variation du moyen mouvement asymptotique en fonction de λ et de α . Comme il ne dépend pas de α , cette surface est cylindrique, les génératrices sont parallèles à $O\alpha$.

La distance des deux points de rencontre de S_n et de Σ avec une même parallèle à Oz est inférieure à $\frac{1}{n}$; la surface analytique S_n tend donc uniformément vers Σ lorsque $\frac{1}{n}$ tend vers zéro; $\mu(\lambda)$ est donc une fonction continue, comme Poincaré l'avait annoncé; mais n'est pas nécessairement analytique.

Ainsi, pour l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \lambda \cos \theta,$$

qui s'intègre immédiatement, $\mu(\lambda)$ est égal à $\sqrt{1-\lambda^2}$ pour $|\lambda| < 1$; il est nul pour $|\lambda| > 1$: La section droite de la surface cylindrique se compose d'un demi-cercle et des deux prolongements du diamètre qui le limite.

Toute ligne C_{pn} est située sur Σ ; si elle n'est pas formée de parallèles à l'axe $O\alpha$, il lui correspond une ou plusieurs bandes B_{pn} du plan $z = \frac{p}{n}$ limitées par des parallèles à cet axe et faisant partie de Σ . Réciproquement, à une telle bande, située sur un plan $z = \frac{p}{n}$ de cote rationnelle, il correspond nécessairement une courbe C_{pn} et une famille de solutions périodiques. Il peut arriver que C_{pn} soit composée de parallèles à l'axe $O\alpha$; il n'y a plus lieu de parler de bandes B_{pn} , leur largeur étant alors nulle.

L'existence de lignes C_{pn} ainsi constituées, qui paraît si vraisemblable au premier abord, est-elle une conséquence nécessaire de ce qui précède? je ne saurais le dire. Mais, par contre, il est bien évident qu'il existe des bandes B_{pn} aussi étroites qu'on le veut (c'est à dire que la différence des valeurs extrêmes de λ correspondant à la bande, est arbitrairement petite). On écarte, bien entendu, le cas où le moyen mouvement asymptotique resterait constant dans l'intervalle de variation de λ .

Les valeurs μ_0 et μ_1 de $\mu(\lambda)$ pour $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$, étant supposées différentes, soit, pour fixer les idées, $\mu_0 < \mu_1$.

La surface analytique S_n coupe les plans $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$ suivant des courbes Γ et Γ_1 . Pour tous les points de Γ_0 on a $z < \mu_0 + \frac{1}{n}$ et, pour ceux de Γ_1 , $z > \mu_1 - \frac{1}{n}$; et si n est assez grand, il existe un entier p tel que
$$\mu_0 - \frac{1}{n} < \frac{p}{n} < \mu_1 + \frac{1}{n}.$$

Coupons alors S_n par un plan $\alpha = \text{constante}$: l'intersection coupe le plan $z = \frac{p}{n}$. Il existe alors des solutions périodiques pour lesquelles les nombres r et s du n° 1 sont égaux à p et à n , et pour lesquelles la valeur initiale de θ a une valeur arbitrairement donnée à l'avance.

Il suffit de connaître (d'une façon exacte ou suffisamment approchée) une solution de chacune des équations particulières obtenues en remplaçant dans (2) λ par λ_0 et par λ_1 , pour pouvoir s'assurer que les valeurs correspondantes, μ_0 et μ_1 , du moyen mouvement asymptotique μ , sont différentes.

S'il en est ainsi, on pourra, en résumé, affirmer l'existence d'une infinité de familles à un paramètre de solutions périodiques, pour l'équation générale (2). Parmi celles-ci il en est qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de familles où toutes les solutions sont périodiques, quelles que soient les valeurs initiales de ces solutions.

Meccanica. — *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di relatività.* Nota della sign.^{na} CLARICE MUNARI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Caratterizzazione energetica dei moti soggetti a resistenza viscosa od idraulica.* Nota I di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia P un punto materiale libero. I suoi movimenti sotto l'azione di una forza perpendicolare alla velocità, in un mezzo che loro opponga una resistenza viscosa (idraulica), sono caratterizzati dal fatto che, in un intervallo di tempo non nullo qualunque, la perdita unitaria di forza viva ⁽¹⁾ è positiva e dipende solamente dalla durata dell'intervallo (dal cammino percorso da P).

Questa è l'osservazione che, convenientemente generalizzata prendendo in esame il movimento di un qualunque sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, forma il soggetto della Nota presente e di un'altra che le farà immediatamente seguito.

1. Sia S un sistema olonomo con n gradi di libertà a vincoli indipendenti dal tempo e privi di attrito. Indicando con \mathfrak{T} la forza viva, con q_1, q_2, \dots, q_n le coordinate lagrangiane, le equazioni del moto saranno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} = Q_h, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ove si rappresenti con Q_h la forza secondo la coordinata lagrangiana q_h (che in generale sarà funzione di t , delle q e delle \dot{q}).

Di più, poichè si suppongono i vincoli indipendenti dal tempo, \mathfrak{T} risulterà una forma quadratica delle \dot{q} (definita e positiva)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

⁽¹⁾ Naturalmente, per perdita unitaria di forza viva relativa ad un intervallo di tempo, intendo il quoziente tra la differenza dei valori iniziale e finale della forza viva, e il valore iniziale della forza viva stessa.

a coefficienti dipendenti dalle sole q , e varrà l'equazione della forza viva

$$(1) \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \sum_h^n Q_h \dot{q}_h,$$

che dà, come conseguenza immediata,

$$\frac{d \log \mathfrak{S}}{dt} = \frac{\sum_h^n Q_h \dot{q}_h}{\mathfrak{S}}.$$

Se ne deduce, posto

$$P_{t,\tau} = \frac{\mathfrak{S}_t - \mathfrak{S}_{t+\tau}}{\mathfrak{S}_t},$$

detta cioè $P_{t,\tau}$ la perdita unitaria di forza viva nell'intervallo di tempo $(t, t + \tau)$:

$$(2) \quad P_{t,\tau} = 1 - e^{\int_t^{t+\tau} \frac{\sum_h^n Q_h \dot{q}_h}{\mathfrak{S}} dt}.$$

2. Per esporre nel modo più semplice ed espressivo l'osservazione da cui deriva la presente Nota, ci sarà conveniente di contrassegnare con opportune denominazioni due speciali tipi di dipendenza (delle Q dalle \dot{q} , cioè) delle forze attive su S dall'atto di movimento.

Diremo che il sistema delle forze attive su S :

1°) è *perpendicolare all'atto di movimento* quando, qualunque siano t , le q e le \dot{q} , si ha

$$(3) \quad \sum_h^n Q_h \dot{q}_h = 0;$$

2°) *deriva da una resistenza di mezzo* quando sia

$$(4) \quad Q_h = -f(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ove $f(\mathfrak{S})$ è una funzione della forza viva di S sempre positiva per $\mathfrak{S} > 0$. In questo secondo caso chiameremo $f(\mathfrak{S})$ la funzione caratteristica della resistenza di mezzo.

Ambedue le denominazioni introdotte si presentano come naturali estensioni di denominazioni di uso corrente quando si pensi alla rappresentazione del moto di S mediante il moto di un punto P (di coordinate q_1, q_2, \dots, q_n) in un S_n , a fondamento della cui metrica sia posta la forma differenziale quadratica (definita e positiva)

$$ds^2 = \sum_{rs} a_{rs} dq_r dq_s.$$

Per la prima denominazione la cosa appare senz'altro evidente: rispetto poi alla seconda, è forse il caso di rilevare esplicitamente che, quando si richieda che le Q risultino proporzionali alle $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}}$, i valori forniti per esse dalle (4) sono i più generali cui corrisponda in qualunque atto di movimento del sistema una potenza essenzialmente negativa, e di grandezza dipendente solo dalla grandezza della forza viva di S .

3. Ciò premesso, supponiamo che il sistema delle forze attive su S risulti di un sistema di forze perpendicolari all'atto di movimento e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo: cioè sia

$$Q_h = Q_h^* - f(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ove le Q_h^* , qualunque siano t , le q e le \dot{q} , soddisfino la relazione

$$\sum_1^n Q_h^* \dot{q}_h = 0.$$

Posto

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{S}) dt,$$

avremo allora, per la (2),

$$(5) \quad P_{t,\tau} = 1 - e^{-I_{t,\tau}},$$

cioè $P_{t,\tau}$ risulterà una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$ ⁽¹⁾:

Supponiamo, viceversa, che nel moto di S , $P_{t,\tau}$ risulti una funzione di $I_{t,\tau}$ soltanto, positiva per $I_{t,\tau} > 0$:

$$P_{t,\tau} = \mathfrak{F}(I_{t,\tau}).$$

In questa ipotesi, derivando rispetto a τ , otteniamo, qualunque sia τ ;

$$\frac{d}{d\tau} P_{t,\tau} = -\frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d}{dt} \mathfrak{S}_{t+\tau} = \mathfrak{F}'(I_{t+\tau}) f(\mathfrak{S}_{t+\tau});$$

(¹) Sulla traccia del procedimento seguito nella Nota del Levi-Civita: *Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità* (Atti del R. Istituto Veneto, serie VII, tomo VII), sarebbe facile di convincersi che la (5) è una diretta conseguenza del fatto che le equazioni del moto di S , in assenza del sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, si possono ricavare dalle equazioni del moto libero dello stesso S , mediante il cambiamento di variabile indipendente

$$dt_1 = e^{-\int f(\mathfrak{S}) dt} dt,$$

ove t_1 rappresenti il tempo pel moto libero, e t il tempo pel moto soggetto al sistema di forze derivante dalla resistenza di mezzo di funzione caratteristica $f(\mathfrak{S})$.

e in particolare per $\tau = 0$ (scrivendo per semplicità, secondo il solito, \mathfrak{S} al posto di \mathfrak{S}_t),

$$(6) \quad \frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = -kf(\mathfrak{S}),$$

ove si rappresenti con k il valore, necessariamente positivo ⁽¹⁾, di $\mathcal{F}'(0)$.

Confrontando la (6) colla (1) si ottiene

$$\sum_1^n Q_h \dot{q}_h = -kf(\mathfrak{S}) \mathfrak{S}.$$

Se allora poniamo

$$Q_h = Q_h^* - kf(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_h}, \quad (h, 1, 2, \dots, n)$$

subito troviamo che in qualunque atto di movimento del sistema, cioè qualunque siano t , le q e le \dot{q} , dovrà risultare

$$\sum_1^n Q_h^* \dot{q}_h = 0.$$

Possiamo dunque concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema delle forze attive su S risulti di un sistema di forze perpendicolare all'atto di movimento, e di un sistema di forze dovuto ad una resistenza di mezzo, è che esista una funzione $f(\mathfrak{S})$ della forza viva del sistema, sempre positiva per $\mathfrak{S} > 0$ e tale che, posto

$$I_{t,\tau} = \int_t^{t+\tau} f(\mathfrak{S}) dt,$$

$P_{t,\tau}$ risulti funzione di $I_{t,\tau}$ solamente, positiva per $I_{t,\tau} > 0$. In tale ipotesi, la $f(\mathfrak{S})$ coinciderà, a meno di una costante moltiplicativa, colla funzione caratteristica della resistenza di mezzo.

(¹) Essendo

$$\mathcal{F}(0) = P_{t,0} = 0,$$

l'ipotesi che sia

$$\mathcal{F}(I_{t,\tau}) > 0$$

per

$$I_{t,\tau} > 0$$

porta di conseguenza che $\mathcal{F}'(0)$ non può risultare negativa. D'altra parte non può risultare nulla, perchè allora, per la (6), sarebbe $\mathfrak{S} = \text{cost}$, e, in conseguenza, $P_{t,\tau} = 0$, qualunque fosse τ . Sarà dunque, necessariamente,

$$\mathcal{F}'(0) > 0.$$

Matematica. — *Sopra alcune applicazioni della teoria della chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali.* Nota del dott. LUCIO SILLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le ultime ricerche del prof. Lauricella, intorno ai sistemi di funzioni ortogonali, all'equazione integrale di prima specie e alle funzioni permutabili del prof. Volterra, avendo dato luogo di recente a notevoli lavori ⁽¹⁾, saranno, a nostro avviso, feconde di nuovi ed importanti risultati, soprattutto se taluno, interpretando il comune desiderio, ne agevolerà al più presto lo studio ripubblicandole in una Memoria riassuntiva che il compianto Autore non ebbe agio di fare.

Ci proponiamo, per ora, di mostrare che la teoria stabilita nella Nota *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.* ⁽²⁾ permette, come il Lauricella stesso affermava nel proemio, di trovare utili applicazioni per gli sviluppi delle funzioni in serie di funzioni ortogonali e per la risoluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti.

1. Sia

$$(\Phi) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots$$

un sistema finito o infinito (numerabile) di funzioni ortogonali in un certo intervallo (a, b) : le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ siano, cioè, sommabili (integrabili, nel senso del Lebesgue) insieme con i loro quadrati e con i loro prodotti due a due in quell'intervallo, e tali che si abbia:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \dots i \neq j \\ 1 & \dots i = j \end{cases}.$$

Il sistema Φ è detto *chiuso* se le equazioni integrali:

$$(1) \quad \int_a^b \theta(x) \varphi_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

non ammettono alcuna *soluzione effettiva* $\theta(x)$, cioè non sono eventualmente soddisfatte che da funzioni $\theta(x)$ diverse dallo zero tutto al più in un insieme

⁽¹⁾ Cfr., per esempio, le Note: del prof. E. Daniele, *Sui nuclei che si riproducono per iterazione* [Rendic. del Circolo mat. di Palermo, tom. XXXVII (1914), pp. 262-266]; e del prof. C. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XXIII (1914), pp. 219-225].

⁽²⁾ Rendic. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, tom. XXI (1912), pp. 675-685.

di punti di misura nulla. Se, invece, esistono soluzioni effettive delle equazioni (1), il sistema Φ sarà detto *aperto* ⁽¹⁾.

Nel caso di un sistema Φ aperto, il Lauricella ha dimostrato ⁽²⁾ che si può sempre, ed in un modo solo, costruire un sistema finito, o infinito e numerabile, di funzioni ortogonali:

$$(M) \quad \mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_l(x), \dots,$$

che egli ha chiamato *sistema complementare* di Φ . in guisa che il sistema totale che ne risulta:

$$\Omega = \Phi + M = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \mu_1(x), \mu_2(x), \dots$$

sia ortogonale e chiuso.

2. Gioverà ora richiamare un teorema che ha una speciale importanza per le questioni che interessano i sistemi di funzioni ortogonali e la soluzione dell'equazione integrale di prima specie a limiti costanti, e che si può denominare di *Fischer-Weyl* ⁽³⁾.

Sia proposta la successione:

$$(2) \quad f_1(x), f_2(x), \dots$$

di funzioni sommabili nell'intervallo (ab) insieme con i loro quadrati: diremo che quella successione è *convergente in media* se si ha:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_a^b \{f_m(x) - f_n(x)\}^2 dx = 0.$$

Diremo poi che la successione (2) *converge in media verso la funzione* $f(x)$, se è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b \{f(x) - f_s(x)\}^2 dx = 0.$$

Ciò premesso, il teorema di Fischer-Weyl si può enunciare così: Se la successione (2) è convergente in media, è sempre possibile (ed in infiniti modi diversi) estrarre dalla (2) una successione parziale:

$$(3) \quad f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x), \dots,$$

⁽¹⁾ Per maggiore esattezza di terminologia, preferiamo adottare questa locuzione in luogo dell'altra *non chiuso*.

⁽²⁾ Nella Nota precedentemente citata: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.*

⁽³⁾ Cfr. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, tom. CXLIV, 1° sem., 1907. pp. 1022-1024); H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* (Math. Ann., tom. LXVII, 1909, pp. 225-245) e G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei. serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

dove n_1, n_2, n_3, \dots sono numeri interi, positivi e crescenti, la quale converge *uniformemente in generale* ⁽¹⁾ nell'intervallo (ab) verso un'unica funzione $f(x)$ determinata in tutto (ab) (eccetto, al più, i punti di un insieme di misura nulla) e sommabile col suo quadrato in quell'intervallo. Inoltre la successione (2) converge in media verso la funzione $f(x)$, e si può pure scrivere:

$$(4) \quad f(x) = f_{n_1}(x) + [f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)] + [f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)] + \dots$$

3. TEOREMA I: se $F(x)$, come pure il suo quadrato e il suo prodotto per una qualunque delle funzioni $\varphi(x)$ del sistema Φ , sono funzioni sommabili nell'intervallo (ab) , e se, inoltre, Φ è un sistema chiuso, è sempre possibile sviluppare $F(x)$ in una serie di funzioni $\varphi(x)$ che converge *uniformemente in generale nell'intervallo* (ab) , secondo il teorema di Fischer-Weyl.

Ci limiteremo soltanto ad indicare la dimostrazione di questo teorema, rinviando per i particolari ad una precedente Nota ⁽²⁾.

Siano:

$$a_i = \int_a^b F(x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

i cosiddetti *coefficienti di Fourier* della funzione $F(x)$ relativi alla successione Φ ; posto:

$$(5) \quad f_j(x) = \sum_{i=1}^j a_i \varphi_i(x), \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

si dimostra che la successione (5) è convergente in media; quindi, per il teorema di Fischer-Weyl, la successione convergerà in media verso una unica funzione $F_1(x)$ tale che, applicando la formola (4), si potrà scrivere:

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \varphi_i(x) + \dots,$$

dove, beninteso, la serie del secondo membro è uniformemente convergente in generale nell'intervallo (ab) considerato.

Ora, poichè:

$$\int_a^b F_1(x) \varphi_i(x) dx = a_i,$$

⁽¹⁾ È una locuzione del Weyl; s'intende che, indicata con ε una quantità positiva ad arbitrio, la successione (3) convergerà in egual grado in un intervallo C_ε (appartenente ad (ab) e la cui misura non è inferiore a $b-a-\varepsilon$) verso una funzione $f(x)$.

⁽²⁾ Cfr. la nostra Nota: *Sulla propagazione del calore* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, tom. XXI, 1912, pp. 441-447).

sarà:

$$\int_a^b \{F(x) - F_1(x)\} \varphi_i(x) dx = 0;$$

quindi $F(x) = F_1(x)$, essendo Φ un sistema ortogonale chiuso.

4. TEOREMA II. Se $F(x)$ è una funzione che soddisfa alle condizioni enunciate nel precedente teorema e, dippiù, il suo prodotto per una qualunque delle funzioni $\mu(x)$ del sistema M , complementare del sistema Φ , è sommabile nell'intervallo (ab) ; se, inoltre, Φ è un sistema ortogonale aperto, la condizione necessaria e sufficiente affinché $F(x)$ sia sviluppabile in serie di funzioni $\varphi_i(x)$, uniformemente convergente in generale nell'intervallo (ab) , a norma del teorema di Fischer-Weyl, è che si abbiano:

$$(6) \quad \int_a^b F(x) \mu_i(x) dx = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Supponiamo, pertanto, che si sia trovato:

$$(7) \quad F(x) = \sum_1^{n_1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_i \varphi_i(x) + \dots$$

dove le a_i sono i coefficienti di Fourier di $F(x)$ rispetto alle funzioni $\varphi_i(x)$ del sistema Φ ed n_1, n_2, \dots indicano numeri interi, positivi e crescenti: la serie del secondo membro è, inoltre, supposta convergente uniformemente in generale nell'intervallo (ab) . Moltiplicando ambi i membri della (7) per $\mu_j(x)$ e integrando per serie, fra i limiti a e b , si ha:

$$\int_a^b F(x) \mu_j(x) dx = \sum_1^{n_1} a_i \int_a^b \mu_j(x) \varphi_i(x) dx + \dots = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

giacchè si è tenuto conto che le funzioni $\varphi_i(x)$ e $\mu_j(x)$ costituiscono un unico sistema ortogonale ($n: 1$).

Dunque la condizione (6) è necessaria.

Ci rimane da provare che quella condizione è sufficiente, vale a dire che, supposto siano soddisfatte le (6), la $F(x)$ è suscettibile dello sviluppo (7). Costruiamo, a tal uopo, la successione seguente:

$$\varpi_1(x), \varpi_2(x), \dots, \varpi_j(x) = \sum_1^j a_i \varphi_i(x), \dots:$$

si dimostra, con un metodo già noto ⁽¹⁾, che questa è convergente in media;

(1) Cfr. la nostra Nota già citata.

quindi, pel teorema di Fischer-Weyl, esisterà una funzione $G(x)$ verso la quale la successione convergerà in media, e tale che si avrà:

$$(8) \quad G(x) = \sum_1^{n_1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_i \varphi_i(x) + \dots \quad (1):$$

la serie del secondo membro converge, inoltre, uniformemente in generale nell'intervallo (ab) .

Ora, integrando per serie, dalla (8), si ottiene:

$$\int_a^b G(x) \varphi_j(x) dx = a_j.$$

E, poichè si è posto:

$$\int_a^b F(x) \varphi_j(x) dx = a_j,$$

risulterà:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\} \varphi_j(x) dx = 0.$$

D'altra parte, dalla (8), moltiplicando per $\mu_j(x)$ e integrando per serie fra a e b , abbiamo, a causa della ortogonalità del sistema $\Omega = \Phi + M$

$$\int_a^b G(x) \mu_j(x) dx = 0.$$

Ma, per ipotesi, sussistono la (6); dunque avremo pure:

$$\int_a^b \{G(x) - F(x)\} \mu_j(x) dx = 0.$$

Ora, poichè M è il sistema complementare di Φ , $\Omega = \Phi + M$ è un sistema chiuso e dobbiamo perciò concludere che $F(x) = G(x)$.

5. I risultati precedenti trovano utili applicazioni nell'equazione integrale di prima specie:

$$(9) \quad g(x) = \int_a^b K(x, y) h(y) dy,$$

dove $g(x)$ è una funzione data, $K(x, y)$ è il *nucleo dell'equazione integrale*, pur esso noto, e $h(y)$ è la funzione incognita. Come è noto, per la teoria dello Schmidt (*), esiste una serie finita od infinita (numerabile) di coppie di funzioni ortogonali

$$\varphi_1(x), \psi_1(y); \varphi_2(x), \psi_2(y); \dots$$

(1) S'intende che i numeri n_1, n_2, \dots non sono propriamente quelli della formola (7).

(2) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (Math. Ann., tom. 63, 1907, pp. 433-476).

tali che:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, y) \psi_i(y) dy, \quad \psi_i(y) = \lambda_i \int_a^b K(x, y) \varphi_i(x) dx,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ costituiscono una successione di costanti positive che, se infinita, ha il solo punto limite $\lambda \equiv \infty$.

Ora se il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle x , se cioè il sistema Φ è aperto, talchè le equazioni integrali (1) ammettono soluzioni $\theta(x)$ effettive, per l'esistenza di una soluzione della (9) debbono essere soddisfatte due condizioni ⁽¹⁾: a) che la serie $\sum_i a_i^2 \lambda_i^2$ converga, essendo:

$$a_i = \int_a^b g(x) \varphi_i(x) dx;$$

b) che $g(x)$ sia sviluppabile in serie di funzioni $\varphi_i(x)$ con i coefficienti a_i . Ebbene, in base al teorema II (n. 4) possiamo sostituire alla condizione (b) l'altra, in modo cioè che si abbia:

$$(10) \quad \int_a^b g(x) \mu_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

dove le $\mu_1(x), \mu_2(x), \dots$ costituiscono il sistema complementare di Φ .

6. Il Lauricella ha dimostrato ⁽²⁾ che, alla condizione (b) si può sostituire l'altra equivalente:

$$(11) \quad \int_a^b g(x) \theta(x) dx = 0,$$

che deve essere soddisfatta da tutte le funzioni $\theta(x)$ che sono soluzioni delle (1). Ora è facile dimostrare che le condizioni (10) e (11) sono sostituibili l'una all'altra. Infatti, se sussistono le (10) possiamo scrivere (n. 4), che

$$g(x) = \sum_1^{n_1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_i \varphi_i(x) + \dots;$$

donde, moltiplicando per $\theta(x)$, e integrando per serie fra a e b , risulta:

$$\int_a^b g(x) \theta(x) dx = \sum_1^{n_1} a_i \int_a^b \theta(x) \varphi_i(x) dx + \dots = 0,$$

giacchè $\theta(x)$ è, per ipotesi, una soluzione effettiva di (1).

⁽¹⁾ Cfr. G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XVIII, 1909, pp. 71-75).

⁽²⁾ Nella Nota ora citata.

Reciprocamente: siano verificate le (11), per ogni funzione $\theta(x)$ che sia soluzione effettiva delle (1). In tal caso, posto:

$$h_i = \int_a^b \theta(x) \varphi_i(x) dx,$$

si deve avere:

$$\theta(x) = \sum_1^{n_1} k_i \mu_i(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2} k_i \mu_i(x) + \dots;$$

donde, moltiplicando per $g(x)$, e integrando per serie, si avrà:

$$0 = \int_a^b g(x) \theta(x) dx = \sum_1^{n_1} k_i \int_a^b g(x) \mu_i(x) dx + \dots$$

Dunque deve essere:

$$\int_a^b g(x) \mu_i(x) dx = 0. \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Risulta, pertanto, chiaramente spiegato perchè la condizione (b) e la (11) sono sostituibili l'una all'altra: esse, infatti, equivalgono entrambe all'unica condizione (10).

7. Vogliamo, da ultimo, fare un'osservazione relativa all'equazione integrale di prima specie (9).

Se il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle x , occorre che le condizioni (a) e (b) siano soddisfatte per l'esistenza di una soluzione $h_1(y)$ della (9) e allora si ha ⁽¹⁾:

$$h_1(y) = \sum_1^{n_1} a_i \lambda_i \psi_i(y) + \sum_{n_1+1}^{n_2} a_i \lambda_i \psi_i(y) + \dots \quad \left(a_i = \int_a^b g(x) \varphi_i(x) dx \right)$$

La soluzione $h_1(y)$ sarà poi *unica* solo nel caso in cui il nucleo $K(x, y)$ risulti *chiuso rispetto alle y* ⁽²⁾.

Se, invece, il nucleo $K(x, y)$ è aperto rispetto alle y ; se, cioè, vi sono soluzioni effettive $\varrho(y)$ dell'equazione:

$$(12) \quad \int_a^b K(x, y) \varrho(y) dy = 0,$$

o, ciò che fa lo stesso, delle equazioni:

$$(13) \quad \int_a^b \varrho(y) \psi_i(y) dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(1) G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, tom. XX, 1911, pp. 528-536).

(2) Cfr. la nostra Nota: *Sui sistemi di equazioni integrali di 1ª specie* (idem, serie 5ª, tom. XXII, 1913, pp. 13-20).

in tal caso la soluzione della (9) conterrà una funzione arbitraria. E precisamente, se si sceglie una funzione arbitraria qualsiasi $\chi(y)$ nell'intervallo (ab) , purchè la serie $\sum_i \alpha_i \psi_i(y)$, con $\alpha_i = \int_a^b \chi(x) \psi_i(y) dy$, sia integrabile termine a termine in (ab) , la funzione:

$$\varrho(y) = \chi(y) - \sum_i \alpha_i \psi_i(y)$$

soddisferà all'equazione integrale (12) e si potrà scrivere:

$$h(y) = h_1(y) + \varrho(y).$$

Ora, indicando con $\nu_1(y), \nu_2(y), \dots$ il sistema complementare di Ψ , si può applicare il teorema II (n. 4) alla funzione $\varrho(y)$, giacchè sono soddisfatte le (13), e quindi si avrà:

$$\varrho(y) = \sum_{i=1}^{s_1} b_i \nu_i(y) + \sum_{i=1}^{s_2} b_i \nu_i(y) + \dots \quad \left(b_i = \int_a^b \varrho(y) \nu_i(y) dy \right)$$

Pertanto la soluzione dell'equazione (9) risulterà espressa in questo modo:

$$h(y) = \sum_{i=1}^{s_1} a_i \lambda_i \psi_i(y) + \dots + \sum_{i=1}^{s_1} b_i \nu_i(y) + \dots$$

Astronomia pratica. — *Sulla costruzione delle tavole per correzione del passo dei microscopi micrometrici.* Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Corrisp. E. ALMANZI.

Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bi-genre un.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

Fisica. — *Sulla formazione della rugiada e della brina.* Nota di ANTONINO L. BURDO, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

Chimica. — *Sul fenomeno di trasformazione nei miscelianti e nell'ammalgama di sodio*. Nota I di M. AMADORI, presentata dal Socio G. CIAMPIAN.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'incompatibilità fra sodio, solfuro e β -nitrile* (*). Nota di GINO BRANCHINI, presentata dal corrispondente A. PIETTI.

Scopo del presente lavoro fu lo studio della natura dell'incompatibilità che si manifesta nelle miscele di sodio, solfuro e β -nitrile col rammolimento e successiva dissolubilazione quando la miscelanza si effettua a temperature superiori a 27° .

Siccome questi tre composti, di cui nessuno in forma pura, hanno la proprietà di fondere bene senza scomporsi in misura apprezzabile per mezzo di un abbassamento del loro punto di cristallizzazione, mi sembrò opportuno di ricorrere in questa mia ricerca, ad un metodo che ha dato già buoni risultati anche nel campo delle sostanze organiche, come lo provano i numerosi lavori apparsi nella letteratura scientifica in questi ultimi anni, e che fu impiegato felicemente a risolvere anche le questioni delle incompatibilità fuorveramente da vari sperimentatori, dei quali basti ricordare il Collen⁽¹⁾, i dottori E. Greenough e G. W. Wainman-Cavaghan⁽²⁾ ed il prof. Inale Bellucci⁽³⁾.

Ho esperimentato, per ottenere le scorie predette, la misura delle velocità di raffreddamento di miscele binarie e ternarie dei tre componenti suddetti, operando su una massa complessiva di circa dieci grammi per ogni esperienza.

Le precauzioni adottate erano le solite, come: disposizione speciale per ottenere il raffreddamento della massa con una velocità uniforme; agitazione continua durante il raffreddamento, finché la massa della fase liquida non diventava troppo piccola in confronto di quella della fase solida, da render consigliabile il rimmergere la miscela per la eventualità di formazione di spuri non che impedissero al termometro di dare indicazioni corrispondenti allo svolgersi dei fenomeni.

Per ogni osservazione furono ripetute le esperienze fino ad ottenere dei dati concordanti e sicuri. Le curve di raffreddamento furono confrontate

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della Università di Napoli.

(¹) *Comptes Rendus*, 249, 1458.

(²) *Ann. Sci. per il progresso delle scienze*, 1912.

(³) *Boll. Acc. Lincei*, 1912, II, 670.

colla curva del dispositivo a vuoto. Ogni volta che, per la limitata massa della fase che avrebbe dovuto produrre anomalie nel raffreddamento del sistema, queste non risultavano molto decise nelle curve relative, l'esperienza fu ripetuta raddoppiando la massa o modificando nel modo più conveniente le disposizioni sperimentali per mettere in evidenza con maggior sicurezza l'andamento dei fenomeni.

Sistema sulfonal + β -naftolo.

Le miscele fuse di salolo e sulfonal lasciano cristallizzare, nel loro raffreddamento, i componenti allo stato puro.

Ciò risulta evidente dall'esame della tabella n. 1, in cui sono riportati i risultati ottenuti nell'analisi termica di questo sistema binario:

TABELLA N. 1.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI		Principio della cristallizzazione	Temperatura eutectica	Durata dell'arresto eutectico in secondi per 10 gr. di sostanza
Salolo	β -naftolo			
100	—	124.5	67	—
90	10	120.5	67	60
80	20	114	67	80
70	30	108.5	67	90
60	40	95	67	110
50	50	82	67	150
40	60	68.5	67	150
30	70	83	67	140
20	80	99	67	190
10	90	110	67	40
—	100	122	67	—

Il sulfonal impiegato proveniva dalla Ditta Bayer & C. di Elberfeld, ed aveva il punto di cristallizzazione a 124.5; il β -naftolo proveniva dalla Ditta Erba di Milano, e cristallizzava a 122°. Tutte le miscele sperimentate presentano dapprima un rallentamento della velocità di raffreddamento in corrispondenza all'inizio della cristallizzazione primaria, e quindi un arresto che si manifesta a temperatura costante, con durata maggiore o minore in corrispondenza alla cristallizzazione eutectica.

Nella fig. 1 è rappresentato il diagramma di stato, il quale ha per base il lato AC del triangolo delle isoterme nel sistema ternario. Nell'area di temperature e concentrazioni M M' E' si verifica la cristallizzazione del sulfonal puro; nella N N' E' invece cristallizza solo il β -naftolo; al disopra delle due curve M E' ed E' N si trova l'area delle temperature alle quali esiste soltanto la fase liquida costituita dalle mescolanze dei due componenti. Al disotto

della retta $M'N'$ esistono soltanto i cristalli di sulfonal e di β -naftolo, meccanicamente commisti.

La temperatura eutectica è di 67° ; la concentrazione eutectica è di 38 % di sulfonal e di 62 % di β -naftolo espressi in funzione dei loro pesi molecolari.

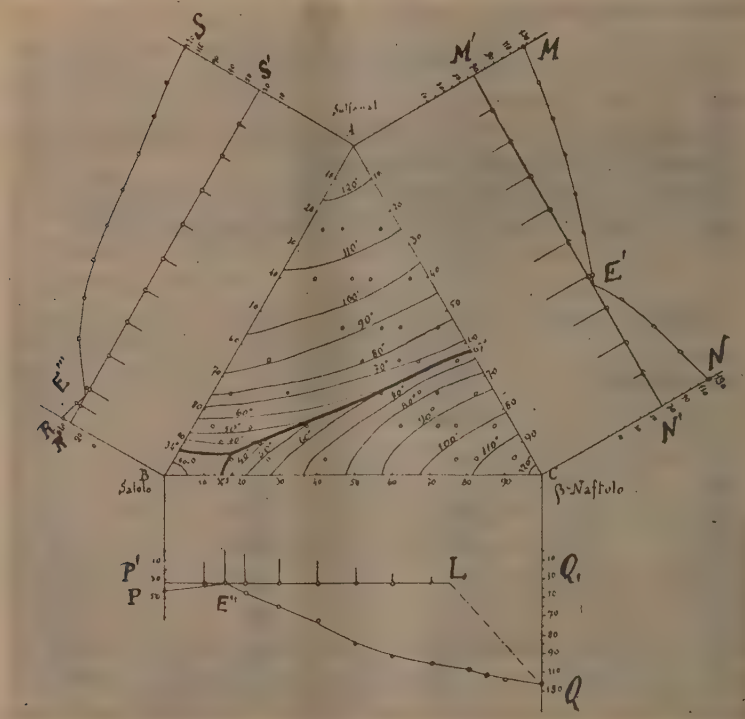


FIG. 1.

Sistema salolo + β -naftolo.

Dall'esame delle curve di raffreddamento delle miscele binarie formate dal salolo e dal β -naftolo, si vede subito che queste due sostanze hanno la proprietà di dare soluzioni solide fra loro in proporzioni limitate.

Infatti, quando si lasciano raffreddare le miscele e concentrazioni elevate di β -naftolo (superiori all'80 % in molecole), si osserva che la cristallizzazione precede regolarmente dal principio alle fine senza dar luogo ad alcun arresto in corrispondenza alla temperatura di cristallizzazione eutectica; le curve temperature-tempi mostrano solo un intervallo di cristallizzazione che incomincia alla temperatura di saturazione della fase liquida iniziale rispetto al β -naftolo, e finisce a temperature sempre più elevate di quella eutectica.

Per le altre concentrazioni si ha regolarmente un rallentamento nella velocità di raffreddamento in corrispondenza al principio della cristallizzazione del salolo o del β -naftolo, ed un arresto alla temperatura eutettica.

L'assenza di eutectico per concentrazioni in β -naftolo superiori all'80 % di β -naftolo è confermata anche dalla curva delle durate degli arresti eutettici, durate che tendono a zero più rapidamente delle concentrazioni del salolo.

Nella seguente tabella n. 2 sono riportati i dati numerici che si riferiscono a questo sistema binario:

TABELLA N. 2.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI		Principio della cristallizzazione	Arresto eutettico	Durate eutettiche in secondi
Sulfonal	β -naftolo			
100	0	42.5	—	—
90	10	36	34.5	100
85	15	34.5	34.5	160
80	20	43.5	34.5	130
70	30	60	34.5	110
60	40	73	34.5	100
50	50	85.5	34.5	80
40	60	94	34.5	50
30	70	101.5	34.5	30
20	80	109	—	—
15	85	114.5	—	—
10	90	119	—	—
0	100	122	—	—

Nella fig. 1, il diagramma di stato di questo sistema è rappresentato sul lato BC del triangolo. In esso sono delimitati i campi di esistenza delle varie fasi: il campo QLE'' e il luogo degli equilibri fra cristalli misti di salolo e β -naftolo colla fase liquida; nell'area $QQ'L$ esistono le soluzioni solide sole; nella $PE''P'$ si hanno i cristalli di salolo puro in equilibrio con la fase liquida; al disotto della linea $P'Q'$ si hanno i cristalli di β -naftolo e di salolo mescolati meccanicamente, e le soluzioni solide; al disopra della curva $QE''P$ la sola fase liquida.

Si conclude, quindi, che l'incompatibilità fra salolo e β -naftolo è di natura fisica; i due componenti formano soluzioni solide ad alta percentuale di β -naftolo cioè dall'80 % in poi. La temperatura eutettica è di 34.5: la concentrazione della miscela eutettica è dell'85 % di salolo e del 15 % di β -naftolo.

Questo sistema era stato precedentemente studiato dai dottori E. Quercigh e Giulia Wautrain Cavagnari, e dal prof. Italo Bellucci. I risultati delle mie esperienze concordano con quelle dei precedenti sperimentatori per

cui l'esistenza di soluzioni solide ricche in β -naftolo sembra definitivamente provata.

Dalle mie ricerche su questo sistema istituite per avere dei dati direttamente confrontabili senza obiezione con quelli ottenuti nel sistema ternario, risulta che l'incompatibilità fra il salolo ed il β -naftolo non esiste per tutte le concentrazioni, ma solo per quelle comprese fra il 0 e l'80 % di β -naftolo. Il salolo impiegato aveva il punto di fusione a 42°,5.

Sistema salolo + sulfonal.

Anche l'incompatibilità esistente fra salolo e sulfonal è di natura fisica, come si può vedere dai dati riportati nella seguente tabella n. 3.

TABELLA N. 3.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI		Principio della cristallizzazione	Temperatura eutettica	Durata dell'arresto eutettico in secondi
Salolo	Sulfonal			
100	0	42.5°	—	—
95	5	39	34	90
90	10	38	34	100
80	20	70.5	34	90
70	30	89	34	80
60	40	97	34	80
50	50	105	34	70
40	60	109	34	60
30	70	112	34	60
20	80	118.5	34	50
10	90	123	34	30
0	100	124.5	—	—

Nella figura 1, nel lato AB del triangolo, è costruito il diagramma di stato di questo sistema binario. Il campo RR'E''' è il luogo degli equilibri monovarianti fra la fase solida, costituita dai cristalli di salolo, e la fase liquida; il campo E'''SS' è quello delle miscele e delle temperature in cui i cristalli di sulfonal sono in equilibrio colla fase liquida.

La concentrazione eutettica è del 92 % di salolo e dell'8 % di sulfonal, espressi in grammimolecole.

La temperatura di cristallizzazione eutettica è di 34°.

Miscela ternarie. — Nel campo delle miscele ternarie furono sperimentate quelle corrispondenti ad otto sezioni parallele al lato sulfonal- β -naftolo ed aventi le seguenti diverse concentrazioni in salolo: 90; 80; 70; 55; 30; 20; 15 e 5 % in molecole.

I risultati sperimentali ottenuti sono riassunti nelle seguenti tabelle nn. 4, 5, 6, 7 ed 8. Dall'insieme di queste cifre si può ottenere la rappre-

sentazione dei fenomeni che si verificano nel sistema ternario, ricorrendo al solito metodo delle coordinate triangolari.

Si osserva che la solubilità del salolo nel β -naftolo allo stato solido non viene minimamente influenzata dalla presenza del sulfonal, e quindi che nel campo ternario non si osservano per via termica se non cristalli misti binarii.

Si stabilì, quindi, che la temperatura dell'eutectico ternario che si forma nelle miscele di salolo, sulfonal e β -naftolo è di 27° ; e le concentrazioni dei rispettivi componenti sono del 15 % di β -naftolo, 7 % di sulfonal e 78 % di salolo, espressi in molecole.

Per tale ragione, la posizione E dell'eutectico ternario è molto vicina al lato salolo + β -naftolo del triangolo delle concentrazioni; da esso partono le tre linee su cui si effettua la cristallizzazione secondaria, che vanno a terminare alle tre temperature eutectiche binarie alle concentrazioni relative rappresentate dalle proiezioni E' , E'' , E''' sui lati AB, BC e CB che chiameremo identicamente E' , E'' , E''' .

Il procedere della cristallizzazione che avviene normalmente nella porzione del campo in cui non si formano soluzioni solide binarie, viene influenzato, nell'area rimanente, dalla cristallizzazione delle soluzioni di salolo in β -naftolo.

L'area delle concentrazioni rimane divisa in tre campi:

I. A $E'''EE'$, nella quale la fase cristallina, che si separa inizialmente, è costituita dal sulfonal puro.

II. $CE'EE''$ in cui si ha la cristallizzazione primaria delle soluzioni solide di salolo in β -naftolo.

III. $BE'''EE'$ in cui la fase cristallina che inizialmente si separa è costituita dal salolo puro.

Si conclude, quindi, che:

a) l'aggiunta di sulfonal alle miscele di salolo e β -naftolo ne provoca la fluidificazione a temperature inferiori alla loro temperatura eutectica, finchè però la temperatura ambiente non è inferiore a 27° ;

b) è da sconsigliarsi nella pratica farmaceutica l'aggiunta del sulfonal anche per miscele di salolo e β -naftolo molto ricche in quest'ultimo componente, qualora tali sostanze medicamentose si vogliano somministrare in cartine.

TABELLA N. 4. — SEZIONE I AL 5 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β -naftolo			
5	95	0	123.5	—	34
5	70	20	112	61	27
5	60	35	98	62	27
5	45	50	79.5	64	27
5	35	60	78	66	27
5	25	70	87.5	62	27
5	15	80	103	59	27
5	5	90	115.5	54	27
5	0	95	120.5	—	—

TABELLA N. 5. — SEZIONE II AL 15 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β -naftolo			
15	85	0	120	—	34
15	75	10	115	39	27
15	60	25	104	51	27
15	45	40	85.5	54	27
15	35	50	69	59	27
15	25	60	81	57	27
15	15	70	96	54	27
15	5	80	108.5	37	27
15	0	85	114.5	—	27

TABELLA N. 6. — SEZIONE III AL 20 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β -naftolo			
20	80	0	118.5	—	34
20	75	5	116	47	27
20	60	20	105	49	27
20	45	35	88	53	27
20	35	45	72	55	27
20	25	55	78.5	56	27
20	15	65	92	53	27
20	5	75	84.5	34	27
20	0	80	109	—	27

TABELLA N. 7. — SEZIONE IV AL 20 % DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β -naftolo			
30	70	0	112°	—	34
30	60	10	107	33	27
30	45	25	93.5	41	27
30	35	35	81	47	27
30	25	45	60	49	27
30	15	55	84	41	27
30	0	70	101.5	—	34.5

TABELLA N. 8. — SEZIONI AL 55 AL 70 ALL'80 ED AL 90 DI SALOLO.

CONCENTRAZIONI MOLECOLARI			Cristallizzazione iniziale	Cristallizzazione secondaria	Temperatura eutettica
Salolo	Sulfonal	β -naftolo			
55	45	0	101°	—	34
55	35	10	91.5	28	27
55	25	20	72	32	27
55	15	30	45	21	27
55	5	40	73	28	27
55	0	45	79	—	34.5
70	30	0	89	—	34
70	25	5	80	30	27
70	15	15	50.5	28	27
70	10	20	32	29	27
70	5	25	49	—	27
70	0	30	73	—	34.5
80	20	0	70.5	—	34
80	15	5	53	31	27
80	10	10	38	30	27
80	5	15	28	—	27
80	0	20	43.5	—	34.5
90	10	0	38	—	34
90	5	5	36	30	27
90	0	10	36	—	34.5

Chimica. — *Ossidazioni con bromo sotto l'azione della luce.*

Nota di R. CIUSA e A. PIERGALLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *Sul calore specifico delle leghe metalliche costituite da soluzioni solide.* Nota di LUIGI ROLLA ⁽¹⁾, presentata dal Corrisp. A. GARBASSO.

1. La teoria dei fenomeni termoelettrici, sviluppata recentemente da Bernoulli ⁽²⁾ partendo dall'ipotesi dei *quanti*, viene alla conclusione che, in prima approssimazione, la forza termoelettrica fra una soluzione solida diluita e il metallo solvente, per la differenza di un grado di temperatura, è data da

$$(1) \quad \varepsilon = k \ln \frac{\nu'}{\nu} = k \ln \frac{\theta'}{\theta},$$

dove k è una costante, ν' indica la frequenza atomica *media* della lega, ν la frequenza atomica del solvente, θ' il punto di fusione della lega e θ il punto di fusione del solvente. La (1) è ricavata ammettendo la formola di Lindemann ⁽³⁾

$$(2) \quad \nu = 2,8 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{\theta}{m\nu^{2/3}}}$$

[m = peso atomico: ν = volume atomico], e supponendo che, per approssimazione, il *volume atomico medio* della lega (che s'immagina molto diluita) sia eguale al volume atomico del solvente.

Ma la (1) può considerarsi, in certo modo, come una particolarizzazione della formola di Koref ⁽⁴⁾, verificata già in parecchi casi, secondo la quale, in ciascun composto binario di punto di fusione T_f' , la frequenza di ciascun atomo componente diventa

$$(3) \quad \nu' = \nu \sqrt{\frac{T_f'}{T_f}},$$

quando T_f indichi il punto di fusione dell'elemento preso allo stato puro. Per le soluzioni solide di qualunque concentrazione, vale questa formola. L'esperienza dimostra, infatti, che non sempre il calore specifico di una lega binaria, i cui componenti siano miscibili in tutti i rapporti allo stato solido e liquido, si può calcolare dai calori specifici dei componenti allo stato puro,

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Genova.

⁽²⁾ Zeit. für Elektrochemie, XVII, 689 (1911).

⁽³⁾ Phys. Zeit. IX, 609 (1909).

⁽⁴⁾ Phys. Zeit. XIII, 184 (1912).

mediante la regola del miscuglio. Dunque la frequenza atomica dei componenti, nella lega, non conserva il proprio valore; e il punto di fusione, per le soluzioni solide, si può definire come quella temperatura alla quale le ampiezze delle oscillazioni atomiche diventano tali che gli atomi vicini, del solvente e del soluto, abbiano a toccarsi. Dunque la frequenza atomica di ciascun componente viene ad esser data da una formola analoga alla (2), dove, al posto di θ e di v , figurano il punto di fusione T_f' e il volume atomico del metallo nella lega. Ma quando si ammetta, come è ben verosimile, che v possa essere posto eguale a quello del metallo allo stato puro, si ha

$$\nu' = 2,8 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{T_f'}{mv^{3/2}}},$$

dalla quale, combinata colla (2), si ricava immediatamente la (3).

Con ciò si viene ad affermare che la frequenza atomica di un metallo in una lega costituita da una soluzione solida dipende dalla concentrazione di questa. Alla curva di fusione corrisponde una *curva di frequenza atomica* per ciascun componente; e le formole che possono servire per calcolare quella, saranno, in generale, facilmente generalizzate per il calcolo di questa ⁽¹⁾. La differenza tra la frequenza atomica di un metallo allo stato puro e in lega, raggiunge un valore massimo, per poi diminuire quando la concentrazione della soluzione solida è uguale a quella del liquido della fusione: questa legge però riguarda solo le differenze negative, perchè, in accordo colle considerazioni teoriche di van Laar ⁽²⁾ non si sono ancora trovati dei sistemi, costituiti da due metalli miscibili in tutti i rapporti allo stato solido e liquido, il cui diagramma di fusione presenti un massimo. L'eccezione sarebbe costituita dal comportamento del sistema Pb-Tl, ma non è ancora ben certo se il punto di massimo corrisponda a un composto definito.

2. La conferma sperimentale della (3), si può avere studiando una proprietà delle soluzioni solide che dipenda dalla frequenza atomica dei componenti: per es. la conducibilità elettrica ⁽³⁾ o il calore specifico.

Quanto ai calori specifici ⁽⁴⁾, sebbene esistano molte misure, non si conosce una ricerca sistematica completa, guidata dalla teoria. Tuttavia, sebbene su leghe di altra natura, costituite da composti definiti, Schimpff ⁽⁵⁾, nel laboratorio di Tammann, ha fatto delle determinazioni molto accurate, dalle quali risultarono, in modo non dubbio, regolarità che indicano l'esistenza di una legge generale.

(¹) Cfr. van Laar, Zeit. f. phys. Ch. 63, 216, (1908).

(²) Ibid. 63, 236, (1908); 64, 272, (1908).

(³) Cfr. Wien, Ber. d. preuss. Ak. d. Wiss. (1913), 184.

(⁴) Landolt-Börnstein-Roth, Tabellen, (1913), 777 e segg.

(⁵) Zeit. für phys. Ch., 71, 257, (1910).

Si può in sostanza ritenere che ogniquale volta il punto di fusione della lega è più alto di quelli dei componenti, o, per lo meno, assai più alto di quello di uno dei componenti, il calore specifico è minore di quello calcolato colla legge di Kopp. La differenza tra il valore calcolato e quello trovato non cresce sempre al crescere della differenza tra i punti di fusione della lega e dei componenti, sicchè non sempre la (3), estesa senz'altro a questo caso, sarebbe verificata. Ma non bisogna dimenticare che l'additività del volume molecolare è un'ipotesi che non sappiamo fino a qual punto sia valida, e la (3) stessa ha sempre il carattere di formola approssimata.

Non va passato nemmeno sotto silenzio lo studio di Laborde ⁽¹⁾, il quale stabilì che, nelle leghe di ferro e antimonio, il calore specifico è sempre maggiore di quello che prescrive la regola del miscuglio. Ciò è in conformità col diagramma di fusione.

Quando si applichino le formole della teoria dei *quanti* per il calcolo dei calori specifici dei corpi solidi mono-atomici, si ha modo di interpretare questi risultati che prima di ora rimanevano solo dati empirici.

Per eseguire una ricerca sistematica sopra le soluzioni solide metalliche, io ho considerato le leghe di

argento - oro
oro - rame
rame - nichel
nichel - manganese
manganese - rame ⁽²⁾.

La curva di fusione dei sistemi argento-oro, rame-nichel, come è noto, non ha punti in cui la tangente sia parallela all'asse delle concentrazioni ⁽³⁾. Le curve di fusione dei sistemi oro-rame, nichel-manganese, manganese-rame, hanno un minimo rispettivamente in corrispondenza dell'82 % in peso di oro, del 45 % in peso di nichel e del 32 % in peso di manganese ⁽⁴⁾.

I calori specifici furono misurati col calorimetro a blocco di rame descritto da Koref ⁽⁵⁾; e con quello a toluolo, tipo Fabre e Silbermann, modificato da Schottky ⁽⁶⁾. Il primo servì per la temperatura compresa tra — 190° e 0°, l'altro, tra 0° e 25°.

L'errore medio delle determinazioni è sempre inferiore all'1 %.

⁽¹⁾ Beiblätter, (1896), 858.

⁽²⁾ Debbo ringraziare il mio carissimo amico, prof. Nicola Parravano, per aver messo a mia disposizione le leghe di cui ebbi bisogno nel corso delle esperienze, e per avermi fornito i campioni dei metalli puri che servirono per le fusioni.

⁽³⁾ Landolt-Börnstein-Roth, (1913), 642, 674.

⁽⁴⁾ Ibid., pagg. 655, 686, 674.

⁽⁵⁾ Ann. d. Physik. XXXVI, 49, (1911). L'apparecchio fu costruito dal sig A. Hoenon, meccanico dell'Istituto di chimica fisica di Berlino.

⁽⁶⁾ Phys. Zeit. X, 634, (1910).

Prima di sperimentare sulle leghe, si fecero sempre le misure corrispondenti sui metalli che servirono a prepararle.

Si calcolò, colla regola del miscuglio, il calore specifico delle leghe studiate: indi, applicando la (3), si calcolò, per ciascun metallo in lega, il calore atomico a pressione costante colla formola (1)

$$(4) \quad C_p = \frac{3}{2} R \left[\frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1\right)^2} \right] + A \frac{T'}{T} C_p^s,$$

nella quale $R = 1,685$, e T rappresenta la temperatura assoluta media alla quale fu eseguita l'esperienza.

Il calore specifico della lega è allora dato da

$$(5) \quad \frac{\frac{C_p' g'}{A'} + \frac{C_p'' g''}{A''}}{g' + g''},$$

essendo C_p' , C_p'' i valori atomici così calcolati dei due metalli il cui peso atomico è A' , A'' ; e i cui pesi rispettivi, nella lega, sono g' , g'' .

Si ha, riassumendo (2), la seguente tabella:

(1) Cfr. Nernst e Lindemann, Zeit. f. Elektr., XVII, 820, (1911).

(2) I risultati delle esperienze verranno pubblicati per intero nella « Gazzetta Chimica italiana ».

Lega Ag-Au [Au: 20 %].

T_f'	T_f	$\beta\nu$	$\beta\nu'$	T	Cal. spec. (trov.)	Cal. spec. [calc. colla (5)]	Cal. spec. (Reg. del miscuglio)
1279	Ag: 1233 Au: 1336	Ag: 213 Au: 123	Ag: 217 Au: 121	137 234 285	0,0459 0,0495 0,0513	0,0453 0,0491 0,0505	0,0455 0,0493 0,0505

Lega Cu-Au [Cu: 20 %].

1157	Au: 1336 Cu: 1356	Au: 123 Cu: 330	115 305	137 234 285	0,0391 0,0430 0,0437	0,0384 0,0421 0,0429	0,0378 0,0415 0,0428
------	----------------------	--------------------	------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Cu-Ni [Ni: 5 %].

1360	Cu: 1356 Ni: 1724	Cu: 330 Ni: 301	Cu: 330 Ni: 267	137 234 285	0,0731 0,0878 0,0906	0,0728 0,0870 0,0902	0,0725 0,0862 0,0897
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Cu-Ni [Ni: 10 %].

1430	Cu: 1356 Ni: 1724	Cu: 330 Ni: 301	Cu: 339 Ni: 274	137 234 285	0,0734 0,0875 0,0908	0,0736 0,0871 0,0903	0,0730 0,0869 0,0901
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Ni-Mn [Ni: 5 %].

1493	Ni: 1724 Mn: 1533	Ni: 301 Mn: 227	Ni: 280 Mn: 271	137 234 285	0,0925 0,1030 0,1062	0,0913 0,1028 0,1056	0,0897 0,1019 0,1042
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Ni-Mn [Ni: 10 %].

1453	Ni: 1724 Mn: 1533	Ni: 301 Mn: 277	Ni: 276 Mn: 269	137 234 285	0,0922 0,1038 0,1096	0,0917 0,1044 0,1057	0,0915 0,1016 0,1038
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Ni-Mn [Ni: 45 %].

1295	Ni: 1724 Mn: 1533	Ni: 301 Mn: 277	Ni: 260 Mn: 254	137 234 285	0,0923 0,1070 0,1109	0,0903 0,1031 0,1057	0,0878 0,0991 0,1009
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Cu-Mn [Mn: 10 %].

1263	Cu: 1356 Mn: 1533	Cu: 330 Mn: 277	Cu: 318 Mn: 251	137 234 285	0,0771 0,0899 0,0947	0,0752 0,0885 0,0930	0,0741 0,0876 0,0909
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lega Cu-Mn [Mn: 32 %].

1138	Cu: 1356 Mn: 1533	Cu: 330 Mn: 277	Cu: 302 Mn: 238	137 234 285	0,0827 0,0956 0,0989	0,0817 0,0944 0,0966	0,0786 0,0912 0,0943
------	----------------------	--------------------	--------------------	-------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Si ha dunque accordo fra la teoria e l'esperienza. Anche se esso non è perfetto, resta dimostrata, almeno qualitativamente, l'esistenza delle curve di frequenza atomica. Effettivamente si tratta di piccole differenze che soltanto con apparecchi di grande sensibilità si riesce ad apprezzare con sicurezza.

Nel caso delle leghe di nichel e manganese, di rame e manganese, e di rame e oro, la cui concentrazione corrisponde ai punti di minimo delle curve di fusione, il fenomeno si apprezza particolarmente bene: nelle leghe di rame e nichel, essendo il punto di fusione compreso fra quelli dei componenti, i calori atomici del rame e del nichel diventano rispettivamente minore e maggiore di quelli degli elementi allo stato puro. Così la regola del miscuglio viene a essere verificata, almeno per un {largo intervallo di concentrazione.

Ciò risulta anche dalle misure di Jäger e Diesselhorst ⁽¹⁾, che riguardano la costantana [60 % di rame e 40 % di nichel]. Per le leghe di argento e oro si deve fare la stessa osservazione: senonchè qui, in ogni caso, il punto di fusione differisce, relativamente, assai poco da quelli dei componenti. E il calore specifico è praticamente uguale a quello della corrispondente miscela greggia dei due metalli.

Il principio stabilito da Tammann ⁽²⁾ — secondo il quale un corpo, che si presenti in due stati diversi, ha un più grande calore specifico quando il suo contenuto in energia è maggiore, o, in altri termini, quando, nel passaggio allo stato in cui il calore specifico è minore, l'energia che si libera è positiva — si può far valere per ciascun componente delle leghe prese in esame. Intanto, ammettendo il fatto sperimentale previsto dalla teoria di Van Lear, che le curve di fusione di due metalli miscibili in tutte le proporzioni allo stato solido e liquido non presentano mai un massimo, si deduce immediatamente che il calore di trasformazione allo stato solido nelle sostanze che passano dallo stato di purezza a quello che caratterizza la soluzione solida, non è mai positivo. Infatti, in tale ipotesi, bisognerebbe che il calore atomico di ciascun metallo di ventasse, nel nuovo stato, più piccolo, in conseguenza della (3) e della (4).

Quando la curva di fusione è sempre crescente o decrescente, non si può, *a priori*, affermar nulla: infatti il calore specifico di uno dei metalli diventa maggiore; e quello dell'altro, minore. Si può però affermare che, nelle curve di fusione a minimo, il calore di {miscibilità allo stato solido deve essere negativo.

⁽¹⁾ Landolt-Börnstein-Roth, (1913), 754.

⁽²⁾ Krystallisieren und Schmelzen, pag. 25.

Batteriologia agraria. — *Azione dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno.* Nota di C. LUMIA, presentata dal Socio G. CUBONI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* Nota II di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

2° Fenomeni che si osservano nelle rane escul. estive tenute in acqua distillata ed in soluzioni Ringer ipertoniche.

Come ho già riferito, prima di porre gli animali nell'acqua distillata o nelle soluzioni saline ipertoniche essi vennero fatti soggiornare in acqua di condotta cambiata tre volte al giorno, finchè nel liquido di lavaggio non si trovavano più i residui alimentari emessi dalle rane. In questo modo era presumibilmente eliminata ogni influenza dell'ambiente dal quale gli animali provenivano, e l'esperimento aveva inizio — sotto questo riguardo — per tutti nelle identiche condizioni.

Quando le rane venivano poste nel recipiente con acqua distillata o negli altri con soluzioni ipertoniche, dopo essere state asciugate accuratamente con un panno pulito, non contenevano mai urina in vescica, come era facile persuadersene premendone l'addome inferiormente ed ai lati.

In ciascun recipiente (vasi di vetro) erano versati cinque litri di liquido e tante rane (circa trenta) da occupare un volume pressochè eguale. Ciò per eliminare le possibili influenze dovute alla differente estensione della superficie assorbente (Spina, Durig, ecc.), nonchè quelle di una differente irradiazione di calore.

I recipienti contenenti gli animali erano poi conservati, come ho detto, in una stanza sotterranea ed al buio.

Dopo 3-8 giorni di permanenza delle rane nei diversi liquidi si osservavano costantemente i fenomeni seguenti:

a) *Le rane in acqua distillata* non presentavano mai un mutamento notevole nel colore della pelle; esse erano normalmente vivaci; non contenevano mai urina in vescica; nè avevano mai liquido in nessuno dei sacchi linfatici.

Aperta la cavità toraco-addominale si notavano tanto lo stomaco quanto l'intestino vuoti di liquido; talvolta nell'ultimo tratto di questo era raccolta un po' di bile densa. Il fegato aveva colorito normale con cistifellea contenente generalmente poca bile; così pure normali apparivano al colorito ed al taglio la milza ed i reni. I polmoni si presentavano normalmente distesi e ben irrorati dal sangue. Il cuore pulsava con ritmo regolare e conteneva un sangue di colorito rosso-chiaro spontaneamente coagulabile.

b) *Le rane in soluzione Ringer ipertonica massima* (soluzione contenente il 10 ‰ di Na Cl) avevano invece molto mutato nel colore della pelle, divenuta grigiastrea. Stimolate adeguatamente (nelle regioni innervate dal Trigemino)⁽¹⁾ si ponevano in riflesso tonico diffuso (iperestesiche); contenevano quasi sempre urina in vescica, ed avevano inoltre una considerevole quantità di linfa giallo-citrino-chiara, spontaneamente coagulabile, nell'interno dei sacchi linfatici, specialmente in quelli laterali. La respirazione di questi animali era differente da quella delle rane tenute in acqua semplice, in quanto predominava manifestamente quella che i tedeschi chiamano „*einpumpende Atmung*“. Aperta la cavità toraco-addominale si notava subito la maggior distensione dei polmoni, come pure si osservava non di rado la presenza di aria tanto nello stomaco quanto nell'intestino. In quest'ultimo organo essa trovavasi spesso commista a liquido verdastro. Il fegato appariva normale con cistifellea contenente per lo più parecchia bile; normali si presentavano anche la milza ed i reni. Il cuore pulsava con ritmo più lento della norma e conteneva un sangue rosso-scuro, denso, spontaneamente coagulabile. Il coagulo era più abbondante di quello formatosi dal sangue delle rane tenute in acqua distillata.

c) *Le rane in soluzione Ringer ipertonica ultramassima* (soluzione contenente l'11 ‰ di Na Cl) avevano un colorito della pelle più accentuatamente grigiastro, ed erano sempre un po' torpide nei loro movimenti. Stimolate anch'esse adeguatamente si ponevano in riflesso tonico diffuso più presto delle precedenti e per stimoli di intensità minore (iperestesia). Rinovando lo stimolo non era anzi raro il caso di promuovere un prolungato grido di dolore; e qualche volta anziché un tono diffuso riflesso si poteva avere un vero tetano. Esse contenevano molta urina in vescica che emettevano facilmente non appena si stringevano in qualche modo tra le dita. La linfa dei sacchi linfatici era invece in quantità molto minore che nelle rane precedenti. Contenevano sempre aria nello stomaco e nell'intestino, commista, in quest'ultimo, a liquido verdastro. La cistifellea conteneva molta bile: il fegato era rosso-scuro in superficie e talora verde-scuro al taglio. Più oscuri anche apparivano la milza ed i reni. I polmoni si mostravano molto distesi, ed irrorati da sangue scuro. Il cuore pulsava con ritmo

(1) B. Brunacci, Zeitschr. f. allgem. Physiol. IX, 1908.

lento e conteneva un sangue più scuro, più denso e più coagulabile del normale. Non di rado si osservava scarso liquido anche tra i muscoli.

d) Quando le rane avevano soggiornato in soluzioni Ringer più concentrate delle precedenti, esse, come abbiamo riferito, morivano entro un intervallo di tempo più o meno lungo a seconda della concentrazione maggiore o minore del liquido ambiente.

I fenomeni che si osservavano in questi casi estremi possono riassumersi come segue:

Pelle grinzosa, grigiastrea la quale si asciugava rapidamente appena l'animale era tolto dal liquido. Emorragie capillari specialmente evidenti nella cute situata tra le due coscie. Sacchi linfatici vuoti di qualsiasi liquido. Polmoni enormemente distesi pieni d'aria, di colorito grigiastro. Lo stomaco e l'intestino contenevano aria. Il cuore, arrestato in diastole era pieno di sangue oscuro e denso. Tutti gli altri organi interni (fegato, milza, rene, ecc.) apparivano di colore molto più oscuro del normale e vi si notavano spesso diffuse emorragie capillari.

È stata ritenuta (Cl. Bernard, P. Bert. ecc.) come causa della morte di questi animali immersi in soluzioni saline troppo concentrate, la forte sottrazione di acqua cui essi vanno per tal modo soggetti. Senza voler escludere questo fattore, senza dubbio importante, mi sembra tuttavia che non debba attribuirgli una importanza esclusiva. È noto infatti che le rane possono sopportare una diminuzione in peso per evaporazione, molto superiore (sino al 25-30 %) a quella che si verifica allorchè siano immerse in soluzioni saline contenenti per es. l'1 % di NaCl, senza pertanto morire. Tra le cause della morte di questi animali mi sembrerebbe dovesse invece ritenersi come molto importante (oltre alla alterata funzione della pelle, restringimento dei pori cutanei, ecc.) l'eccitamento riflesso del vago [per stimoli dolorifici cutanei (iperestesia, riflesso tonico diffuso), e per l'eccessiva distensione dei polmoni (gli animali finchè vivono pompano continuamente aria)] che determina l'arresto diastolico del cuore. Ho infatti osservato che se si apre con precauzione la cavità toraco-addominale di rane appena morte e se si punge uno dei polmoni con uno spillo, si accerta, non di rado, contemporaneamente allo sgonfiarsi di entrambi i polmoni, il ristabilirsi per breve tempo delle pulsazioni cardiache.

Biologia. — *La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo. Contributo critico agli esperimenti di trasmissione.*

Nota II del dott. CARLO BASILE ⁽¹⁾, presentata dal Socio B. GRASSI.

Nella mia Nota precedente ⁽²⁾ io misi in evidenza che nelle regioni mediterranee è possibile, soltanto in determinate condizioni meteorologiche, che, in natura, le pulci, che succhiano sangue periferico di bambini o di cani infetti di leishmaniosi, si infettino di leishmania, e che alla loro volta riescano infettanti.

Per quanto appare fin ora, tali condizioni meteorologiche sono date da quei mesi nei quali la temperatura massima in ciascuna decade non è stata mai inferiore a 18° ctgr., nè superiore a 30° ctgr.; le condizioni più favorevoli però sembrano avverarsi in quei mesi nei quali la temperatura massima, in ciascuna decade, è stata fra 18° ctgr. e 22° ctgr.; bisogna anche notare che le pulci vivono nelle case, fra le vesti, le coltri e le materas-a ove viene a crearsi una temperatura che nei singoli giorni si mantiene meno variabile che nell'ambiente esterno.

Da questi dati si desume che gli esperimenti eseguiti per infetta rispettivamente di leishmania vari insetti ematofagi e quelli di trasmissione di questi protozoi patogeni ad animali sani per via naturale, hanno valore dimostrativo quando sono eseguiti in opportune condizioni di temperatura.

a) *Infezione sperimentale delle pulci.* — Sin dall'inizio delle mie ricerche sulla leishmaniosi interna nel mediterraneo io pensai che le condizioni di temperatura dovessero avere la loro importanza sullo sviluppo delle leishmania nel loro insetto trasmettitore; e nel 1910 infatti ottenni la infezione sperimentale delle pulci (*Ctenocephalus serraticeps*) con virus della leishmaniosi interna del Mediterraneo, mantenendo a 22° ctgr. le pulci che avevano succhiato, con tecnica allora descritta ⁽³⁾, polpa splenica di cane intensamente infetto di leishmaniosi naturale.

Lo stesso esperimento fu successivamente tentato, con esito negativo, dal Gabbi in Messina ⁽⁴⁾; questo autore il 21 agosto 1911, pose quattro gocce di succo splenico, ottenuto, per puntura della milza, da un bambino infetto di leishmania, sotto una campana di vetro sotto la quale fece arrivare 11 pulci

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Rend. Acc. Lincei, Aprile 1914.

⁽³⁾ Rend. Acc. Lincei, Genn. 1911.

⁽⁴⁾ Malaria, Ottobre 1911.

canine e 7 umane: simile esperimento egli ripeté il 10 settembre dello stesso anno con 15 pulci (9 umane e 6 canine). Tanto la prima che la seconda volta l'esperimento fu condotto dal Gabbi, come infatti egli scrisse, a temperatura ambiente. Questa, come risulta dalle mie indagini, tanto il 21 agosto quanto il 10 settembre 1911 superò in Messina i 30° ctgr. e quindi, per come ho rilevato nella mia Nota precedente, essa non era adatta al ciclo evolutivo delle leishmania nella pulce. Ma oltre a ciò (lasciando da parte se le pulci hanno o non hanno effettivamente succhiato) riguardo alla tecnica usata dal Gabbi, resta da osservare che, usando poche gocce di succo splenico, queste in ambiente esterno coagulano subito, così che i parassiti ben presto si alterano e scompaiono; anche per questa sola causa adunque non era possibile la loro ulteriore vitalità ed evoluzione. Così condotto il tentativo del Gabbi di infezione sperimentale delle pulci con *virus* di origine infantile evidentemente non poteva essere positivo!

b) *Trasmissione della leishmaniosi interna per mezzo delle pulci.* —

La trasmissione, per via naturale, della leishmaniosi a cani sani per mezzo delle pulci fu da me ottenuta, negli esperimenti eseguiti dal dicembre 1910 al giugno 1911 ⁽¹⁾; allora migliaia di pulci, raccattate dal dicembre al marzo a Bordonaro, centro endemico di leishmaniosi infantile e canina, furono da me poste a Roma su cuccioli sicuramente sani (nati da madri sicuramente sane ed allevati fuori del contatto di insetti ematofagi) e mantenuti, per tali esperimenti, in canile di nuova costruzione e protetto da fitte reti metalliche affinché nessun insetto ematofago venisse con essi in contatto.

Fu in seguito a questi esperimenti, condotti in modo rigoroso e usando cani di controllo, che potei stabilire (giugno 1911), che, in natura, le pulci riescono infettanti dal dicembre al marzo, non escludendo che esse possano riuscire infettanti anche negli altri mesi qualora vi si osservano le condizioni meteorologiche adatte, non solo al ciclo evolutivo delle leishmania, ma anche alla capacità infettante di esse pulci.

Successivamente (1912) il Massaglia ⁽²⁾ ed il Marshall ⁽³⁾ tentarono, con esito negativo, di trasmettere, per mezzo di vari ectoparassiti, la leishmaniosi interna da cani sperimentalmente infetti a cani sani.

Questi autori non accertarono se le pulci e gli altri ectoparassiti viventi sui cani sperimentalmente inoculati di leishmaniosi presentassero o no nel loro intestino forme evolutive di leishmania. Resta per ciò il dubbio che non solo, per le condizioni meteorologiche forse non adatte, ma anche perchè la inoculazione di leishmania determina quasi sempre negli animali adulti

⁽¹⁾ Rend. Acc. Lincei. Febr., Marzo, Aprile, Giugno, 1911.

⁽²⁾ Patologica 1912.

⁽³⁾ Il R. Army Medical Corps: Sett. 1912.

una infezione sperimentale lieve, tanto le pulci quanto gli altri ectoparassiti non si sieno infettati. Questo dubbio ha maggior valore nel caso del Massaglia dove il cane sperimentalmente infetto era di già in via di guarigione spontanea.

Queste ragioni spiegano a sufficienza il reperto negativo osservato dal Massaglia e dal Marshall.

Il Sergent invece che nel febbraio 1912 iniziò ad Algeri un esperimento di trasmissione della leishmaniosi interna da cane naturalmente infetto a cane sano per mezzo delle pulci, non solo accertò che le pulci erano infette di protozoi « tipo *leishmania* », ma anche seguì la mia tecnica precedente, mantenendo le pulci a 22° cgr.; si pose perciò nelle condizioni di temperatura più adatte ed ottenne esito positivo.

Anche il Wenyon recentemente ⁽¹⁾ ha tentato, in Malta, di trasmettere la leishmaniosi da cane naturalmente infetto a cani sani; egli, su due cuccioli portati dall'Inghilterra ha posto 300 pulci raccattate su un cane infetto di leishmaniosi naturale.

Il Wenyon dopo tre mesi dall'inizio dell'esperimento ha osservato che sui cuccioli si erano sviluppate molte pulci; allo esame microscopico e culturale degli organi di questi cuccioli, divenuti cachettici ed anemici, egli non ha riscontrate leishmania onde, molto affrettatamente, ritiene che il suo esperimento di trasmissione della leishmaniosi interna per mezzo delle pulci sia stato negativo. Io piuttosto penso che l'esperimento del Wenyon resti molto dubbio; volendo anche ammettere che i cuccioli non si sieno infettati è da osservare che l'esperimento è stato iniziato con appena 300 pulci raccattate su un cane infetto di leishmaniosi naturale, onde il numero delle pulci infette, ammesso che ve ne fossero state, sarà stato molto esiguo; anzi io dubito che vi fossero state delle pulci infette, perchè l'autore non ha studiato le loro feci per accertare se esse fossero infette o no di protozoi « tipo *leishmania* ».

Il Wenyon nel suo lavoro non specifica neppure in quali mesi egli ha eseguito tale esperimento; dal complesso del lavoro sembra potersi desumere che egli abbia eseguito l'esperimento nei mesi estivi; perciò, volendo anche ammettere che vi fossero state delle pulci infette, è da osservare che le condizioni metereologiche dell'esperimento mentre erano favorevoli all'attiva moltiplicazione delle pulci, che da lui è stata notata, non erano adatte alla loro capacità infettante.

Meritano particolare attenzione gli esperimenti eseguiti da Pereira da Silva ⁽²⁾; questo autore il 27 aprile 1911 pose un cucciolo dell'età di circa un mese a convivere con due cani sperimentalmente infetti di leishmaniosi

(1) Trans. of the Soc. of tropic. Medicine and Hygiene. Genn. 1914.

(2) Arquivos do Instituto Bacteriologico Camara Pestana. Tom. IV, fasc. II. 1913.

infantile; su questi cani egli, a vario intervallo di tempo, raccolse delle pulci. L'esame delle feci di queste pulci soltanto il 15 giugno, dimostrò la presenza di numerosi parassiti ovali, piriformi, cen o senza flagello, tipo « *leishmania* ». Il cucciolo morì nel dicembre successivo per rognà; l'esame microscopico degli organi emopoietici fu negativo per le leishmania.

In questo caso possiamo ritenere che le pulci dall'aprile al giugno si sieno infettate, ma che successivamente sia per le condizioni meteorologiche non adatte (dal giugno al dicembre) alla loro capacità infettante sia per le speciali condizioni del cane lo esperimento sia riuscito negativo.

Un secondo esperimento è stato eseguito dal Pereira da Silva in opportune condizioni meteorologiche. Quest'autore infatti dal 16 al 24 febbraio 1913 pose a far succhiare su un cane sperimentalmente infetto di leishmaniosi infantile (cane 12° dei suoi esperimenti) 22 pulci le di cui deiezioni, esaminate costantemente nei 15 giorni precedenti non avevano svelato alcun parassita; tre di queste pulci, dopo 8 giorni dall'aver succhiato sangue del cane sperimentalmente infetto, presentarono nelle loro feci dei protozoi « tipo *leishmania* » e si mantennero positive sino alla loro morte: l'ultima di esse morì il 2 marzo.

Dal 24 febbraio sino alla loro morte esse furono nutrite su un cane sano (cane 13°); subito dopo la morte il loro contenuto intestinale fu inoculato in un altro cane sano (cane 14°) il quale morì dopo circa un mese dall'inoculazione; la causa della morte del cane 14° non è stata accertata, il cane 13° sopravvisse. Ambedue i cani (cane 13° e cane 14°) non presentarono nessuna leishmania allo esame microscopico e culturale dei loro organi emopoietici.

Quest'esperimento del Pereira da Silva conferma che le pulci si infettano succhiando sangue di cane infetto. Il reperto negativo di leishmania negli organi emopoietici dei cuccioli (13° e 14°) nei quali era stata tentata la trasmissione della leishmaniosi per via naturale e per via sperimentale lascia dubitare sulla capacità infettante delle pulci infette; questo risultato trova spiegazione in un altro esperimento eseguito contemporaneamente dallo stesso autore. Un cane (cane 15°) al quale fu inoculata un'emulsione di milza del cane 12° (intensamente infetto di leishmaniosi infantile sperimentale e sul quale le pulci si erano nutrite ed infettate) morto anche esso, come il cane 14°, dopo circa un mese dall'inoculazione, non presentò parassiti all'esame microscopico e culturale dei suoi organi emopoietici.

Concludendo il *virus* del cane 12° inoculato in cani sani sia direttamente sia dopo aver subito evoluzione nelle pulci, non si è più rivelato allo esame microscopico e culturale degli organi emopoietici dei cani nelle inoculazioni in serie.

Le stesse condizioni possono essersi avverate nell'esperimento precedente eseguito dal Pereira dall'aprile al dicembre 1911.

Il Pereira da Silva si forza a dubitare che i protozoi da lui osservati nello intestino delle pulci possano essere stati *Herpetomonas*, ma a ciò è da osservare che il non aver l'autore riscontrato alcuna forma di essi negli organi emopoietici dei cani inoculati costituisce un reperto del tutto opposto a quello ottenuto dal Laveran e dal Franchini, i quali, inoculando in *Mus musculus* e successivamente in cuccioli, il contenuto intestinale di pulci infette di protozoi da essi definiti *Herpetomonas* hanno poi osservato nel sangue e negli organi emopoietici degli animali inoculati dei protozoi « tipo *leishmania* ».

Questo mio studio che ha posto in notevole evidenza la meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo dimostra anche che, nelle ricerche su questa infezione, non si deve mai dare valore assoluto a un reperto negativo; così queste mie nuove ricerche confermano pienamente le deduzioni dei miei esperimenti di trasmissione, per via naturale, della leishmaniosi interna nelle regioni mediterranee: tali miei esperimenti, eseguiti in modo rigoroso, corroborati dai controlli, hanno dimostrato sin dal 1911 che le pulci infette di leishmania sono infettanti dal dicembre al marzo; non si può escludere che esse possano essere infettanti negli altri mesi dell'anno qualora vi esistano le opportune condizioni meteorologiche.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

GIANFRANCESCHI G., *Per lo studio del corista campione dell'Ufficio Centrale italiano*. Pres. dal Socio BLASERNA.

ACQUA C., *Osservazioni ed esperienze sul baco da seta*. Pres. dal Socio GRASSI.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente BLASERNA fa omaggio, a nome dell'autore, della pubblicazione del Socio straniero C. D. WALCOTT: *The Monarch of the Canadian Rockies*.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 aprile 1914.

- AGAMENNONE G. — La determinazione delle distanze a cui avvengono i terremoti in base alle osservazioni d'un solo Osservatorio. (Estr. dalla « Rivista di Astronomia e scienze affini », an. VII). Torino, 1913. 8°.
- BATESON W. — Problems of Genetics. New Haven, 1913. 8°.
- BINAGHI R. — La genesi dei tubercoli ferruginosi nelle condotte di acqua potabile studiata dal punto di vista chimico. (Estr. dalla « Rivista di Igiene e di Sanità pubblica », an. XXIV). Biella, 1913. 8°.
- BINAGHI R. — Tubazioni in ghisa ed altri materiali contenenti ferro studiati in rapporto alla formazione dei tubercoli ferruginosi e al rammollimento del materiale delle condutture. (Estr. dagli « Atti del II. Congresso dell'Associazione degli igienisti italiani »). Genova, 1914. 8°.
- BUELOW B. (Fürst von). — Deutsche Politik. Berlin, 1914. 8°.
- CASAGRANDE O. — Tubazioni in ghisa ed altri materiali contenenti ferro studiati in rapporto alla formazione dei tubercoli ferruginosi e al rammollimento del materiale delle condutture. (Estr. dagli « Atti del II Congresso dell'Associazione degli igienisti italiani »). Genova, 1914. 8°.
- DALLA VEDOVA G. — Scritti geografici scelti e ripubblicati a cura d'un Comitato di geografi in occasione dell'80° genetliaco dell'Autore, 29 gennaio 1914. Novara, 1914. 8°.
- EREDIA F. — Sulla spartizione della secchezza. (Estr. dalla « Rivista meteorico-agraria », an. XXXV). Roma, 1914. 8°.
- GALDIERI A. — Fiori, insetti e fumarole. (Estr. dal « Bollettino della Soc. dei naturalisti in Napoli », an. XXV). Napoli, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Il tufo campano di Vico Equense. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XV). Napoli, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — L'origine della terra rossa. (Estr. dagli « Ann. della R. Scuola sup. di agricoltura di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Osservazioni sui calcari di Pietraroia in provincia di Benevento. (Estr. dal « Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », 1913). Napoli, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Su di una calcite feltriforme di Nocera. (Estr. dagli « Annali della R. Scuola sup. di agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Su di una leucofonolite haüynitica del vulcano di Roccamonfina. (Estr. dal « Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », 1913). Napoli, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Sul bolo di Terra di Otranto. (Estr. dagli « Annali della R. Scuola sup. di agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Sulla dissoluzione del calcare in acqua carbonica. (Estr. dagli « Annali della R. Sc. sup. d'agricolt. di Portici », vol. XI). Portici, 1913. 8°.
- GALDIERI A. — Sulla fosforite di Leuca. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli », ser. VI, vol. X). Napoli, 1913. 8°.
- GERHARTZ H. — Ueber die zum Aufbau der Eizelle notwendige Energie (Transformationsenergie). Bonn, 1914. 8°.
- LORIA G. — Le glorie matematiche della Gran Bretagna. (Extr. de la *Révue « Isis »*, I). Wondelgem-lez-Gand, 1914. 8°.

- LUSSANA S. — La termodinamica dei gas e dei liquidi in rapporto alle applicazioni pratiche. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il progresso delle scienze », 1913). Roma, 1914. 8°.
- MAGGI G. A. — Geometria del movimento. Lezioni di cinematica con un'appendice sulla geometria della massa. Pisa, 1914. 8°.
- ORTH J. — Bericht über das Leichenhaus des Charité-Krankenhauses für das Jahr 1912. (Abdr. aus « Charité Annalen », XXXVII Jahrg.). Berlin, 1913. 8°.
- ORTH J. — Gesellschaft der Charité-Aerzte. (Sonderabd. aus « Berliner klin. Wochenschr. », 1914). Berlin, 1914. 8°.
- ORTH J. — Referat über Ribbert, Hugo. Das Carcinom des Menschen, sein Bau, sein Wachstum seine Entstehung. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Krebsforschung », Band XIII). Berlin, 1913. 8°.
- ORTH J. — Ueber eine Geschwulst des Nebennierenmarks nebst Bemerkungen über die Nomenklatur der Geschwülste. (Sonderabd. aus « Sitzungsberichte der kön. preussischen Akad. der Wissenschaften », 1914). Berlin, 1914. 8°.
- PAOLINI V. — Il tufo campano di Vico Equense. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XV). Napoli, 1913. 8°.
- TARAMELLI T. — Il paesaggio della « Giocconda » e l'uomo pliocenico di Castelnedolo. (Estr. dai « Rend. del R. Istit. lombardo di scienze e lettere », volume XLVII). Pavia, 1914. 8°.
- TRANCOSO F. — As radiações ultra violetas e infra-vermelhas, seu estudo e aplicações. Lisboa, 1913. 8°.
- VERWORN M. — Irritability. A physiological Analysis of the general effect of stimuli in living substances. New Haven, 1913. 8°.
- VOLTERRA V. — Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik: gehalten im September 1909 an der Clark-University. Mit Zusätzen und Ergänzungen des Verfassers deutsch von Dr. Ernst Lamla. Leipzig, 1914. 8°.
- WAINER H. — Der Kartenmasstab. Historisch-kritische Betrachtungen. (Sonderabd. aus « Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin », 1914). Berlin, 1914. 8°.
- WAGNER H. — Zur Geschichte der Seemeile. (Sonderabd. aus « Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie », 1913 Berlin, 1913. 8°.
- WALLACE CAMPEELL W. — Stellar Motions with special reference to motions determined by means of the Spectrograph. New Haven, 1913. 8°.

